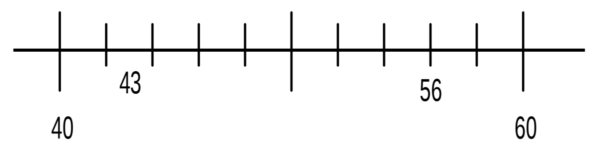
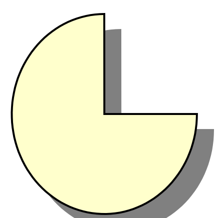
Module TC D2
Comprendre pour intervenir dans le champ des mathématiques…

Domaine numérique de N à D...





Michel VINAIS
Ancien responsable filière ASH. Université d'Orléans

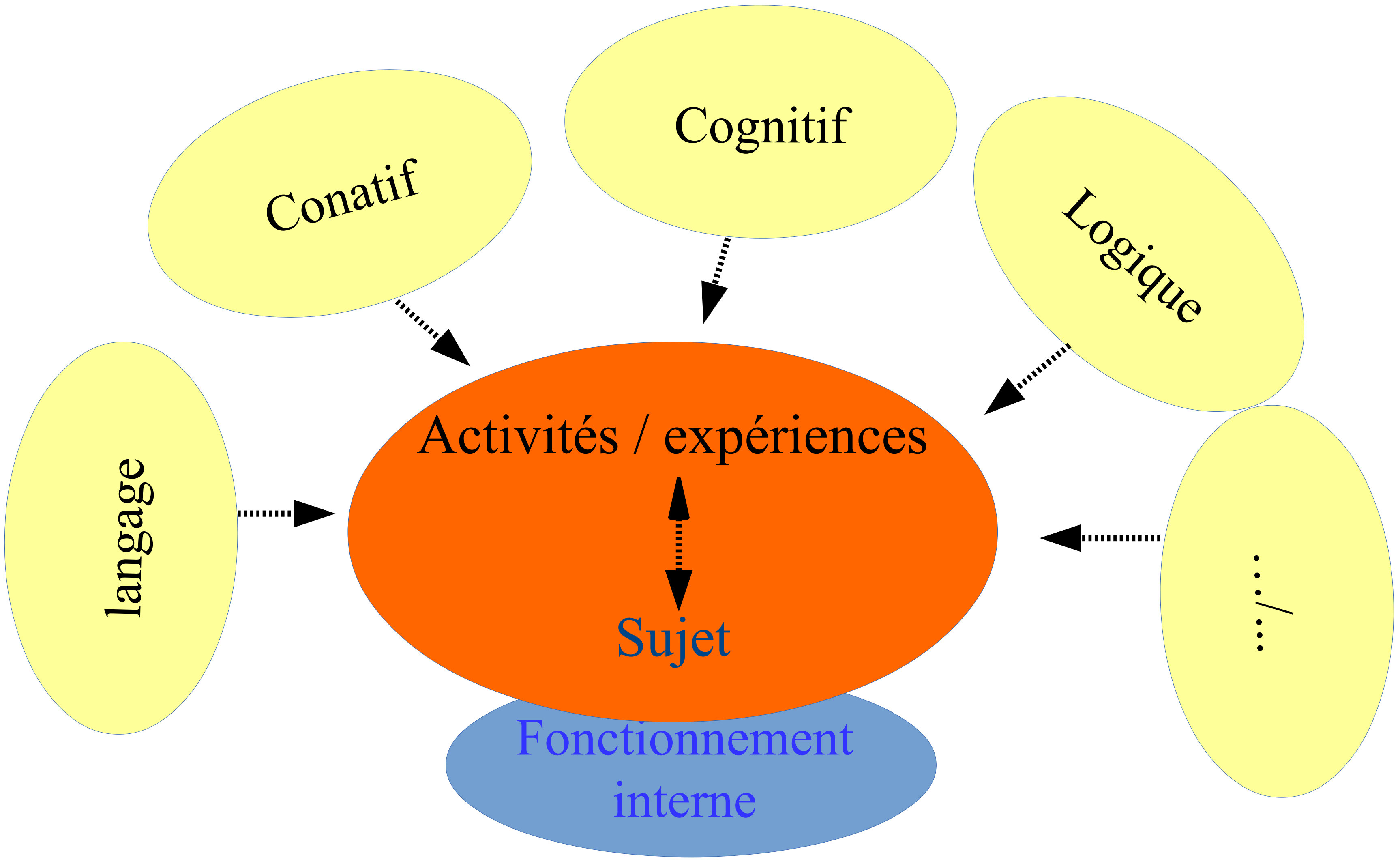
michelvinais@orange.fr

Présentation rapide...

Cahier des charges de module GD1.5/6 :

« Identifier, analyser et prendre en compte les besoins éducatifs particuliers pour leur apporter des réponses pédagogiques et éducatives adaptées. »
« Exercer dans l'école inclusive comme personne ressource. »

Passage de N à D


Cognitif
Conatif
Logique
langage
Activités / expériences
Sujet
Fonctionnement
interne
…/…

Accès au nombres décimaux :

Puisque la partie décimale d'un nombre n'est, de fait, qu'une façon différente de représenter une fraction décimale, il est essentiel que les élèves aient une compréhension solide des fractions.

Obstacles rencontrés

•Du côté du langage : certaines fractions ont un nom spécifique et d'autres pas

½ ➔ un demi

1/3 ➔ un tiers

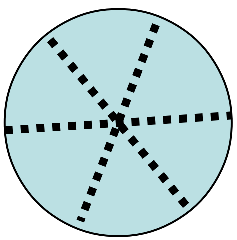
1/7 ➔ un septième

1/n ➔ un nbrième

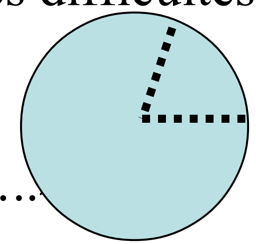
Obstacles rencontrés

•Du côté des élèves ont du mal à se représenter les fractions selon divers modèles…

Le développement du sens du nombre relié aux fractions représente un grand défi pour les élèves. Baroody et Coslick tentent une explication et soulèvent certaines difficultés tant dans l'apprentissage que dans l'enseignement des fractions. Voici quelques-unes de ces difficultés.



Influence du modèle ………..



Le tout fraction et l'unité fractionnaire

ils ne voient pas le lien entre une fraction (p. ex., 5/6) et la fraction unitaire correspondante (1/6), soit que

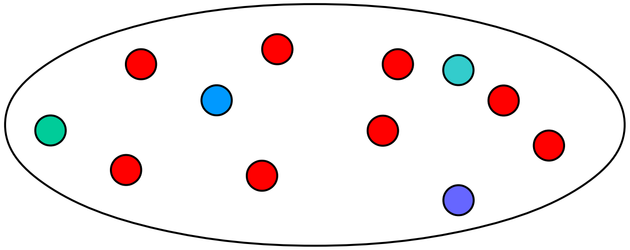
$5/6 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6$ ou que $5/6 = 5 \times 1/6$

Obstacles rencontrés

•Du côté du contexte : certains ont du mal à construire le lien entre le tout et la fraction unitaire correspondante…

•Si le tout correspond à un élément <u>(objet, surface, longueur),</u> on peut le fractionner en parties équivalentes. Chacune des parties peut alors être comparée au tout.

•Si le tout correspond à un ensemble d'éléments, soit une collection d'objets, quelques-uns des éléments peuvent être regroupés pour former une partie de l'ensemble et représenter ainsi une partie du tout.



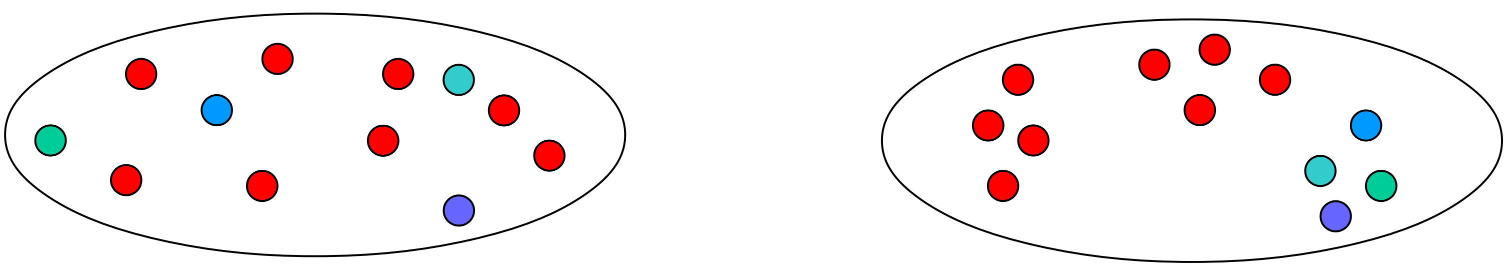
Obstacles rencontrés

•Du côté du contexte : certains ont du mal à construire le lien entre le tout et la fraction unitaire correspondante…

•Si le tout correspond à un élément (objet, surface, longueur), on peut le fractionner en parties équivalentes. Chacune des parties peut alors être comparée au tout.

•Si le tout correspond à un ensemble d'éléments, soit une collection d'objets, quelques-uns des éléments peuvent être regroupés pour former une partie de l'ensemble et représenter ainsi une partie du tout.

L'importance de la représentation ...



Obstacles rencontrés

•Du côté du concept de fraction ainsi que difficulté à saisir l'équivalence de deux fractions :

Concept de fraction

Le mot *fraction* vient du latin *fractio* qui veut dire «rupture».

Une partie d'un objet brisé peut donc représenter une fraction, car c'est une partie d'un tout. Toutefois, pour déterminer une fraction d'un objet divisé en plusieurs parties, il faut que les parties soient équivalentes.

➔

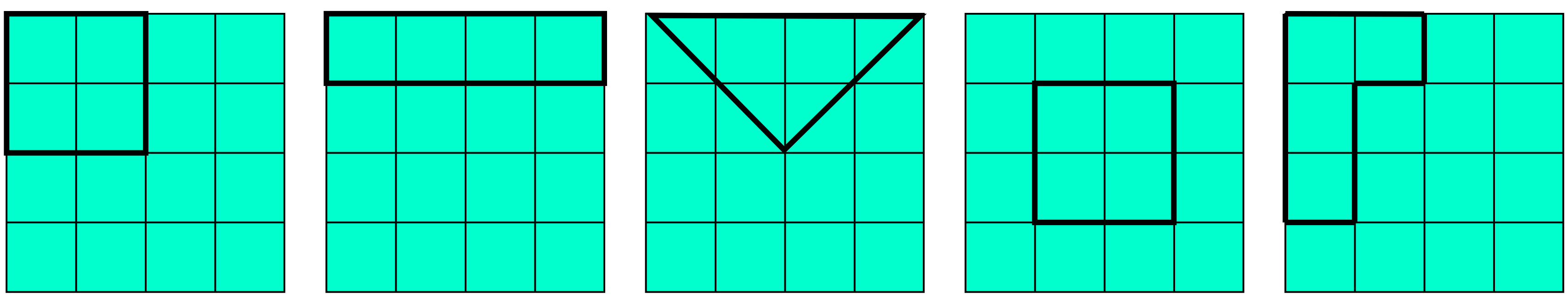
Obstacles rencontrés

- Du côté du concept de fraction ainsi que de la difficulté à saisir l’équivalence de deux fractions :

Concept de fraction

Précisons que lorsqu’il est question de parties équivalentes, il ne s’agit pas nécessairement de formes identiques, bien que celles-ci soient plus faciles à utiliser. Les représentations de un quart (1 / 4) dans l’exemple ci-dessous sont basées sur l’aire du tout.

Malgré leurs formes différentes, chacun de ces quarts représente une partie équivalente d’un même tout.

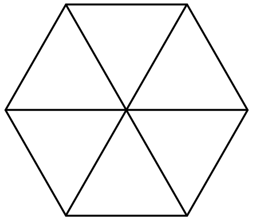


.. /..

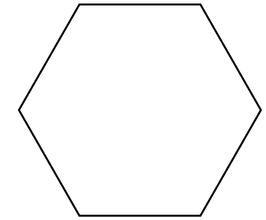
Représentation mentale

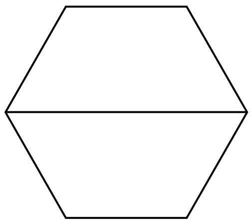
Le développement du sens de la fraction chez les élèves dépend de leur habileté à visualiser les quantités. Généralement, les élèves visualisent assez facilement une fraction modélisée par une surface. Ils ont plus de difficulté à visualiser une fraction modélisée par une partie d'un ensemble.

Il est donc important de présenter une variété de situations et de modèles qui exercent les élèves à visualiser la quantité représentée par une fraction.

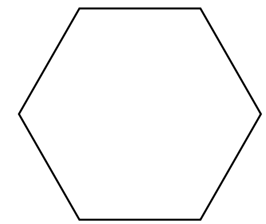


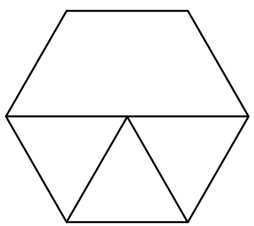
$1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1$



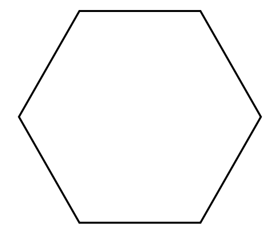


$1/2 + 1/2 = 1$

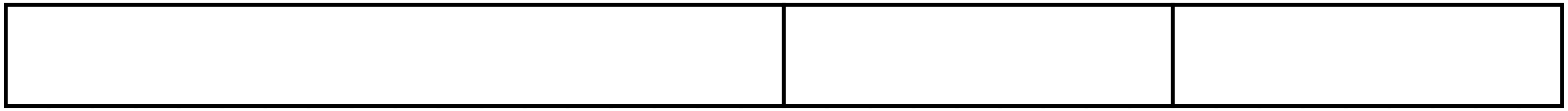




$1/2 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + = 1$

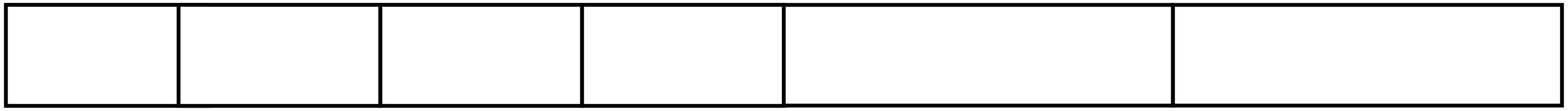


Un « entier »



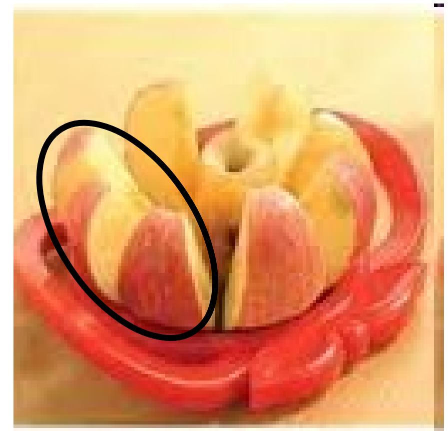
1/2 + 1/4 +1/4

1/3 + 1/3 +1/6 + 1/6

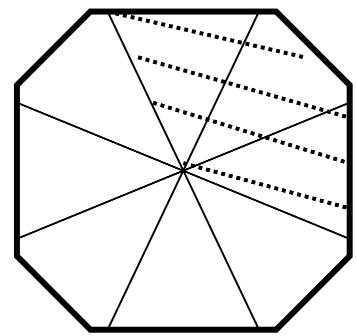


1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 +1/4 + 1/4

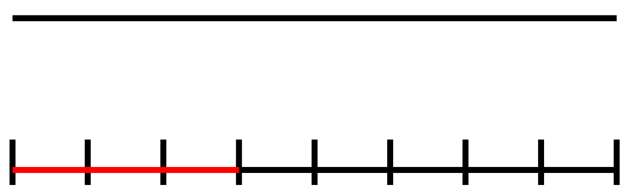
Varier les représentations



3/8 d’un tout, un objet ➔

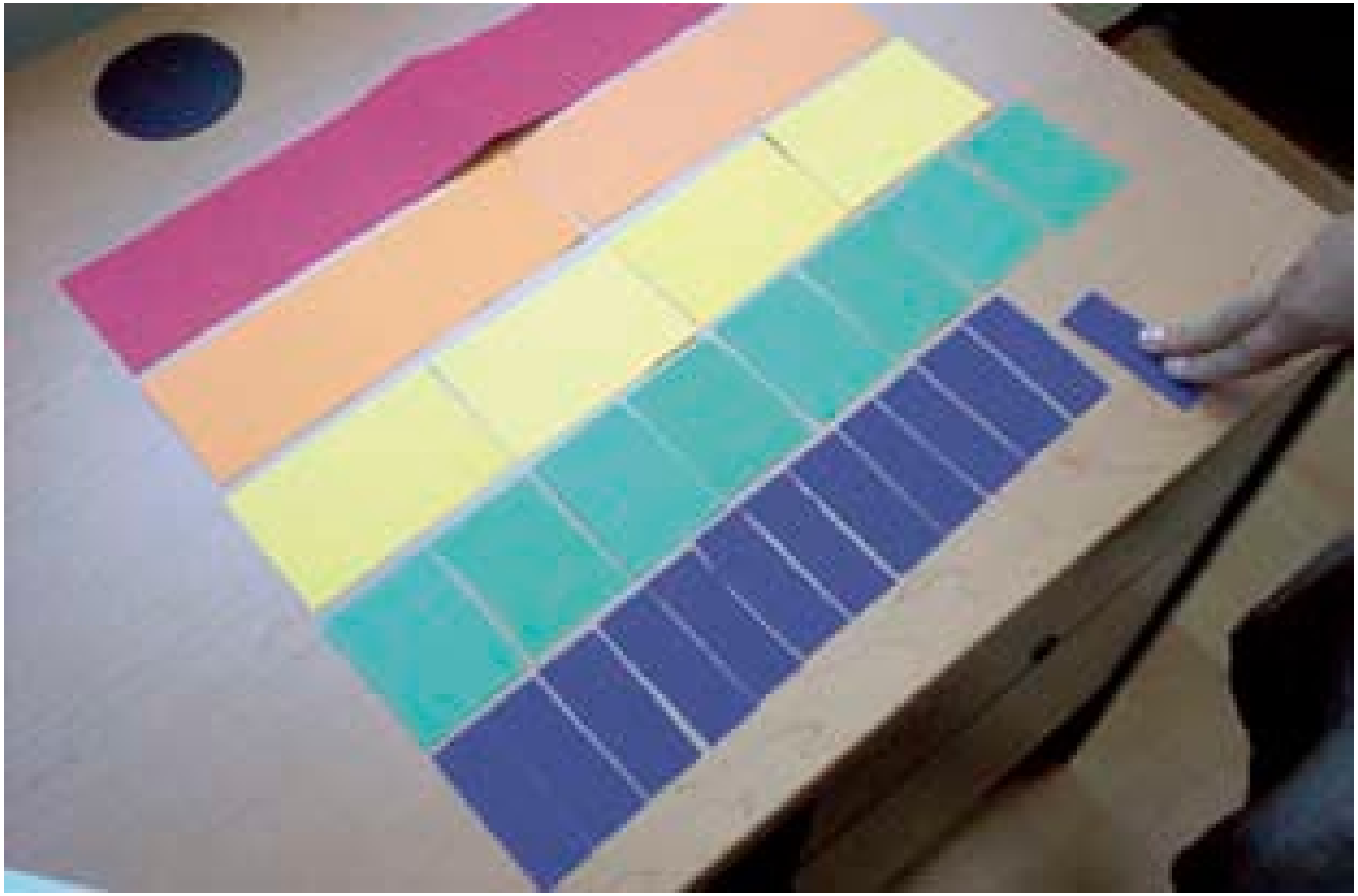


3/8 d’une surface ➔



3/8 d’une longueur ➔

3/8 du segment est rouge



Il est important pour les élèves de comprendre que plus le tout est fractionné, plus ses parties sont petites.

Les différents sens de la fraction 3/4

Partition d'une pluralité

$$\frac{3 \text{ litres}}{4}$$

Quotition

$$\frac{150 \text{ livres}}{30 \text{ livres}}$$

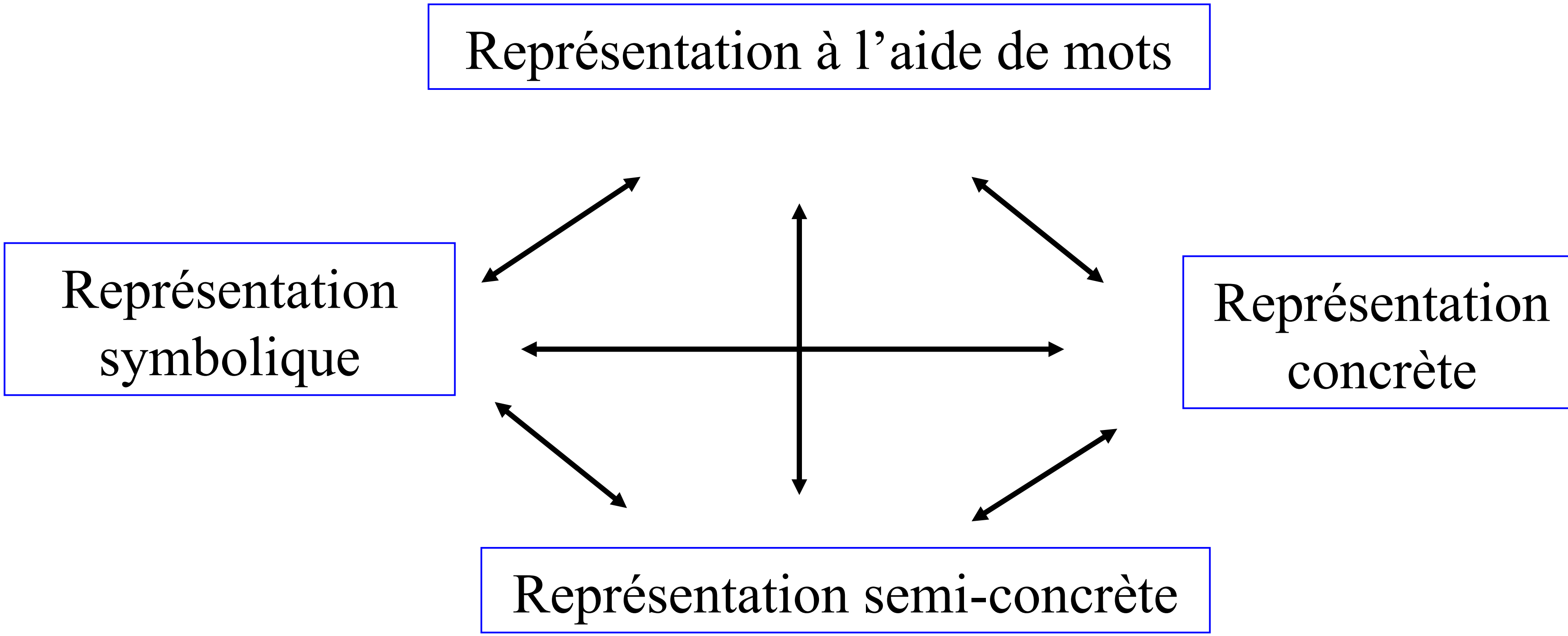
Fractionnement de l'unité

$$\frac{3}{4} \text{ litre}$$

Proportion

$$\frac{3 \text{ grammes}}{4 \text{ litres}}$$

Modes de représentation



Cf. Travaux Baroody et univ. Qb.laval

Modes de représentation

Représentation à l'aide de mots

Un quart

Représentation symbolique

Représentation concrète

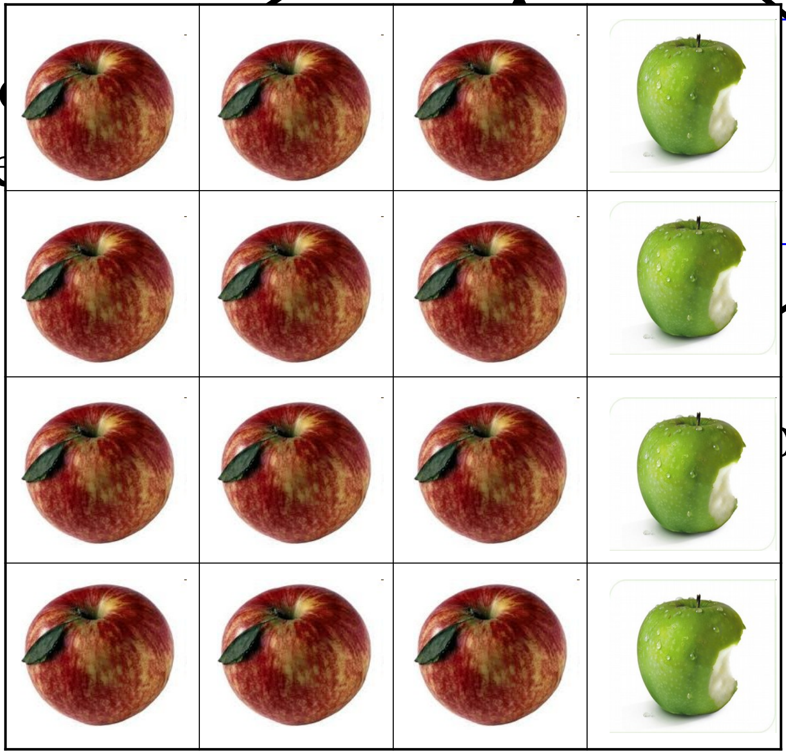
Représentation semi-concrète

Cf. Travaux Baroody et univ. Qb.laval

Modes de représentation

Représentation à l'aide de mots

Représentati
symbolique



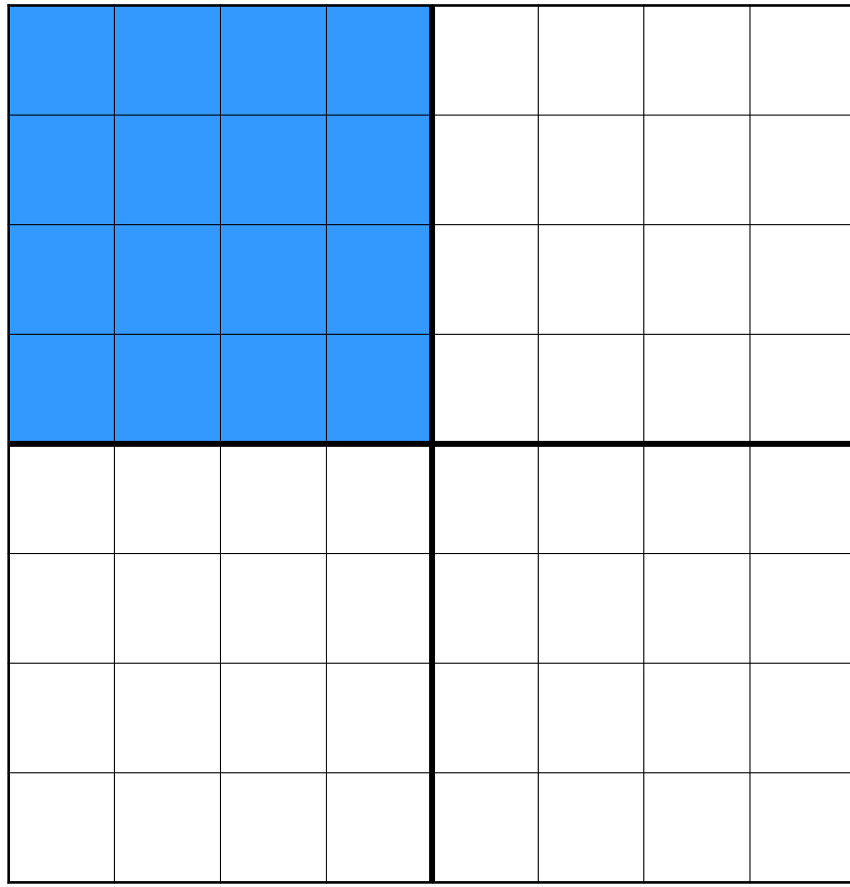
Représentation
concrète

ncrète

Cf. Travaux Baroody et univ. Qb.laval

Modes de représentation

Représentation symbolique

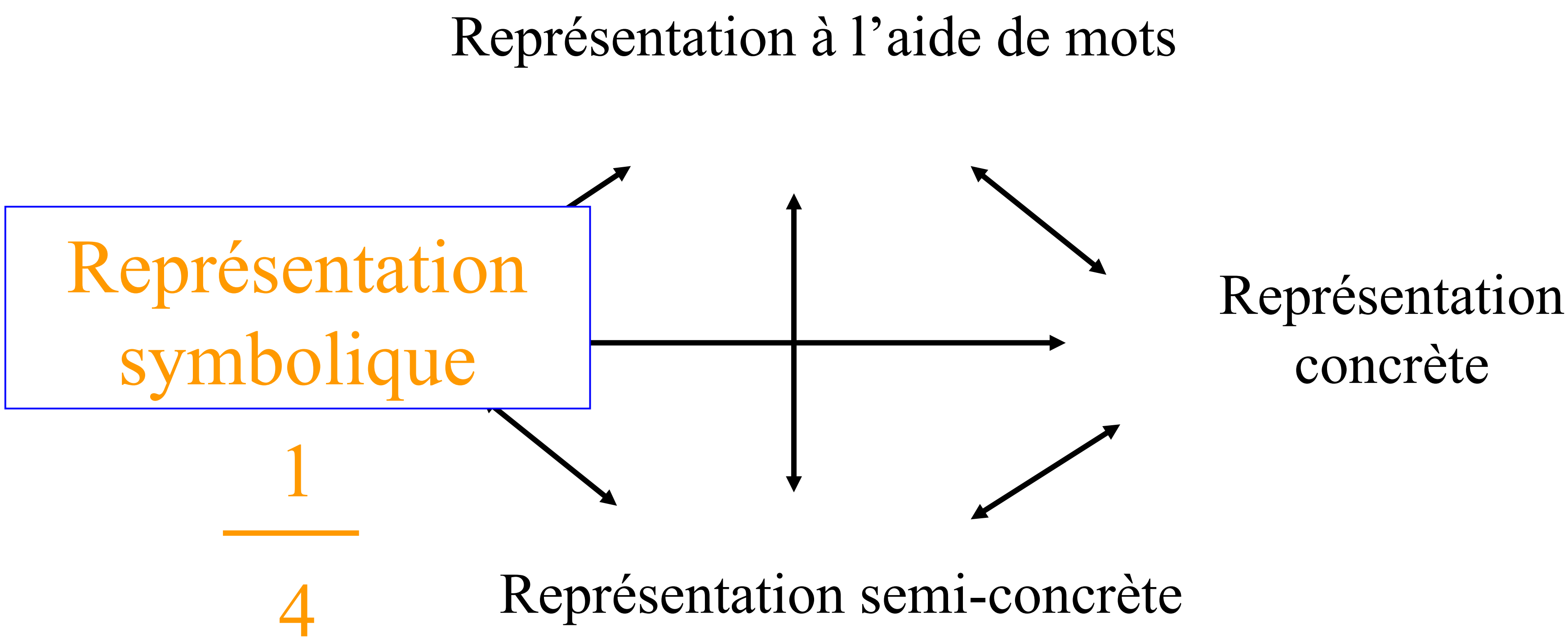


Représentation concrète

Représentation semi-concrète

Cf. Travaux Baroody et univ. Qb.laval

Modes de représentation



Cf. Travaux Baroody et univ. Qb.laval

Nombres décimaux

Plusieurs études et sondages nationaux indiquent que les enfants, en général, ne développent pas une bonne compréhension des nombres décimaux et que plusieurs les utilisent mal et sont même incapables de résoudre des tâches dans des contextes légèrement différents.

Un nombre décimal est un nombre qui peut être exprimé en notation décimale avec une partie décimale finie (p. ex., 3,72; 12,13564).
Il est intéressant de constater que tous les nombres décimaux peuvent être exprimés sous forme de fractions décimales, c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10.

Nombres décimaux

Afin d'explorer l'apprentissage des nombres décimaux, il importe d'examiner la terminologie reliée à ces nombres et à la notation décimale. Un nombre décimal est un nombre qui peut être exprimé en notation décimale avec une partie décimale finie : 3,72 // 12,13564 //

L'ensemble des nombres décimaux inclut tous les entiers, car ces derniers peuvent être exprimés avec une partie décimale (p. ex., 3 = 3,0).

Il inclut aussi certaines fractions, comme 2/5 et 3/16 , puisque 2/5 = 0,4 et 3/16 = 0,1875.

NB : 1/2 , 5/10 sont des représentations symboliques du même nombre décimal 0,5.

Nombres décimaux

D'autres nombres s'écrivent aussi en notation décimale. Par exemple, le nombre pi s'écrit 3,14159265… et le nombre 1/3 s'écrit 0,3333… ou 0,3. Or, puisque ces nombres ne sont pas composés d'une partie décimale finie, ce ne sont pas des nombres décimaux. On les regroupe plutôt, avec les nombres décimaux, sous le vocable de nombres à virgule, puisque la virgule (,) est le symbole choisi pour séparer la partie entière de la partie décimale. Et cela va introduire un abus de langage sur la lecture des nombres décimaux.

Dans un nombre à virgule, la partie décimale peut être finie, infinie et périodique ou infinie et non périodique.

Différents types de parties décimales qui peuvent composer un nombre à virgule.
Partie décimale finie : 5/10 => 0,5   1,458 => 1458/1000
P décimale infinie et périodique : 2/3 => 0,666666
Infinie et non périodique : 1;41421356.. Ou pi

Obstacles liés au contenu mathématique lui-même

Difficultés liées à la rupture avec IN

Passage d'un ordre discret à un ordre dense

- La notion de « suivant » n'existe pas.
- Entre deux décimaux quelconques, on peut toujours intercaler un autre décimal.

Lien entre le nombre et son écriture

Dans N, plus un nombre a de chiffres, et plus le nombre est grand.

Conception du nombre

Dans D, il existe des nombres (autres que zéro) plus petits que 1.

Effet sur la multiplication et la division

Obstacles liés au contenu mathématique lui-même

Difficultés liées à l'écriture et à la lecture des nombres

Dans la dénomination des chiffres, il n'y a pas de « rupture » par rapport à la virgule mais par rapport au chiffre des unités.

Exemple :	centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	millièmes
	3	2	**4**	,	5	8	2

Obstacles liés au discours lors de l'apprentissage

•Un lien trop précoce est établi avec le « système métrique », l'enfant peut concevoir le nombre décimal comme un recollement de deux entiers.

Exemple : 32,48 m : 32 m et 48 cm donc
32,48 + 12,87 = 48,135
Sous entendu (car) 32m 48cm + 16m 87 cm = 48m 135cm

•Dans 32,48 la partie décimale n'est pas 48 mais 0,48

32,48 = 32 + 48/100 = 32 + 0,48

Obstacles du côté du sujet.

Les conceptions des enfants, issues de leurs expériences dans l'ensemble des entiers se traduisent par des « théorèmes en actes » et des « règles d'actions » (Cf G.Vergnaud).

Exemples :

- Le suivant de 3,6 est 3,7.
- Entre 5,12 et 5,13 il n'y a aucun nombre.
- Quand on multiplie, « ça augmente ».
- Quand on divise, « ça diminue ».
- Si on divise, on divise le plus grand nombre par le plus petit nombre.

Obstacles du côté du sujet.

Les élèves considèrent pour la comparaison des décimaux que ces nombres sont comme des entiers sur lesquels on a plaqué une virgule.

Déjà vu diapo 9 sur les erreurs

Exemple : ranger dans l'ordre croissant les nombres : 4,249 4,3 4,06

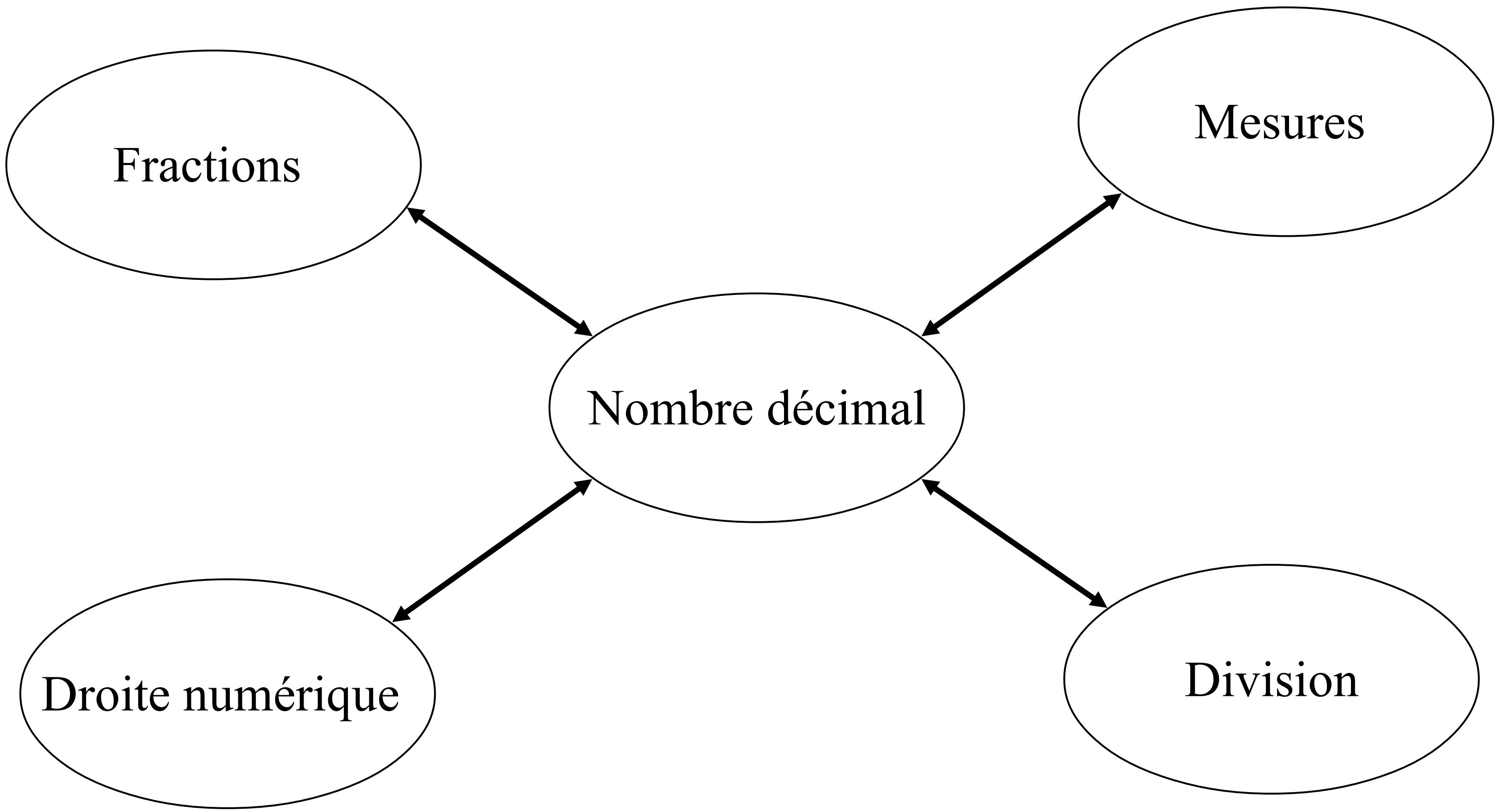
R1 : 4,3 < 4,06 < 4,249

R2 : 4,249 < 4,06 < 4,3

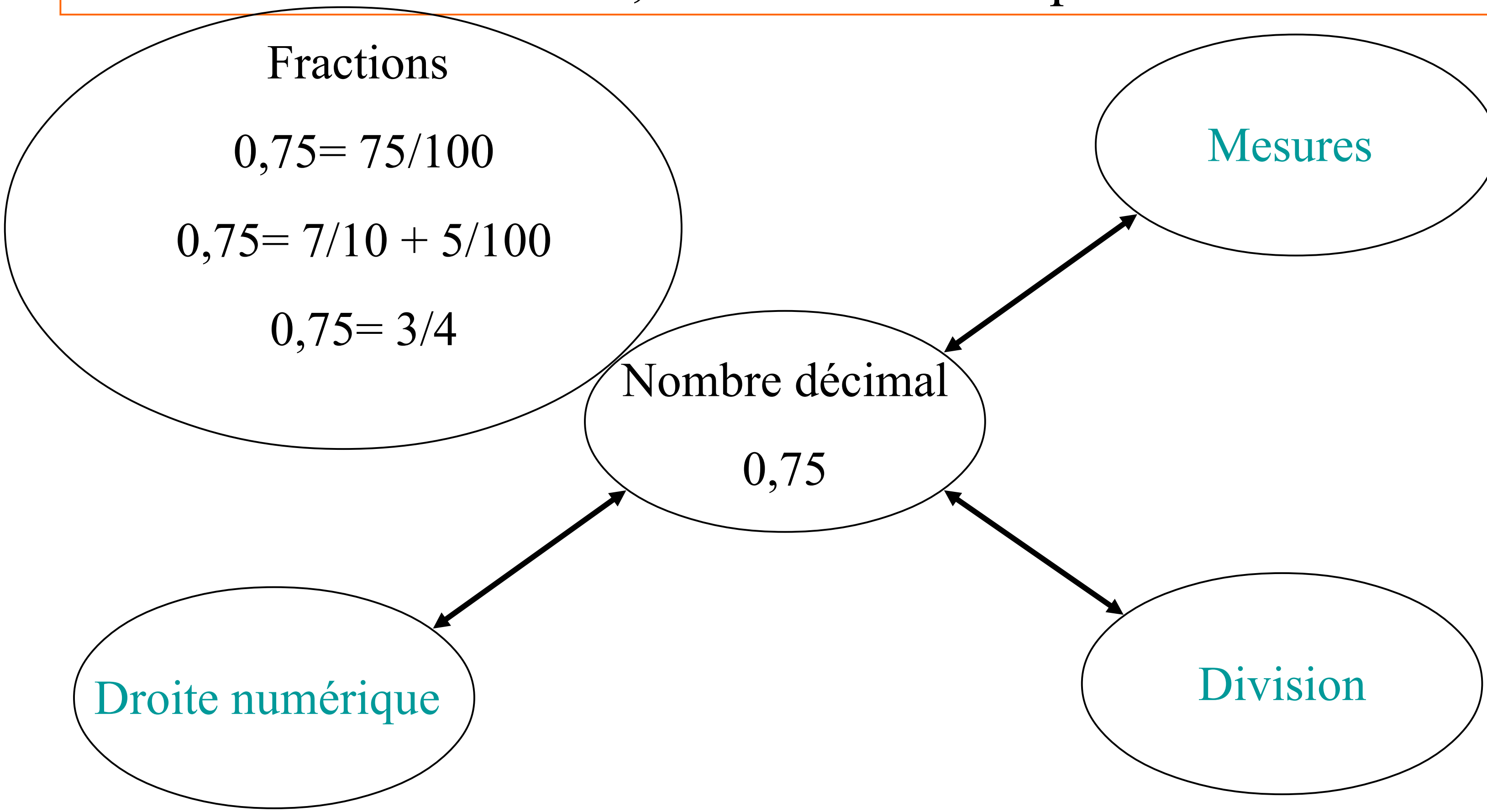
R3 : 4,06 < 4,3 < 4,249

…/…

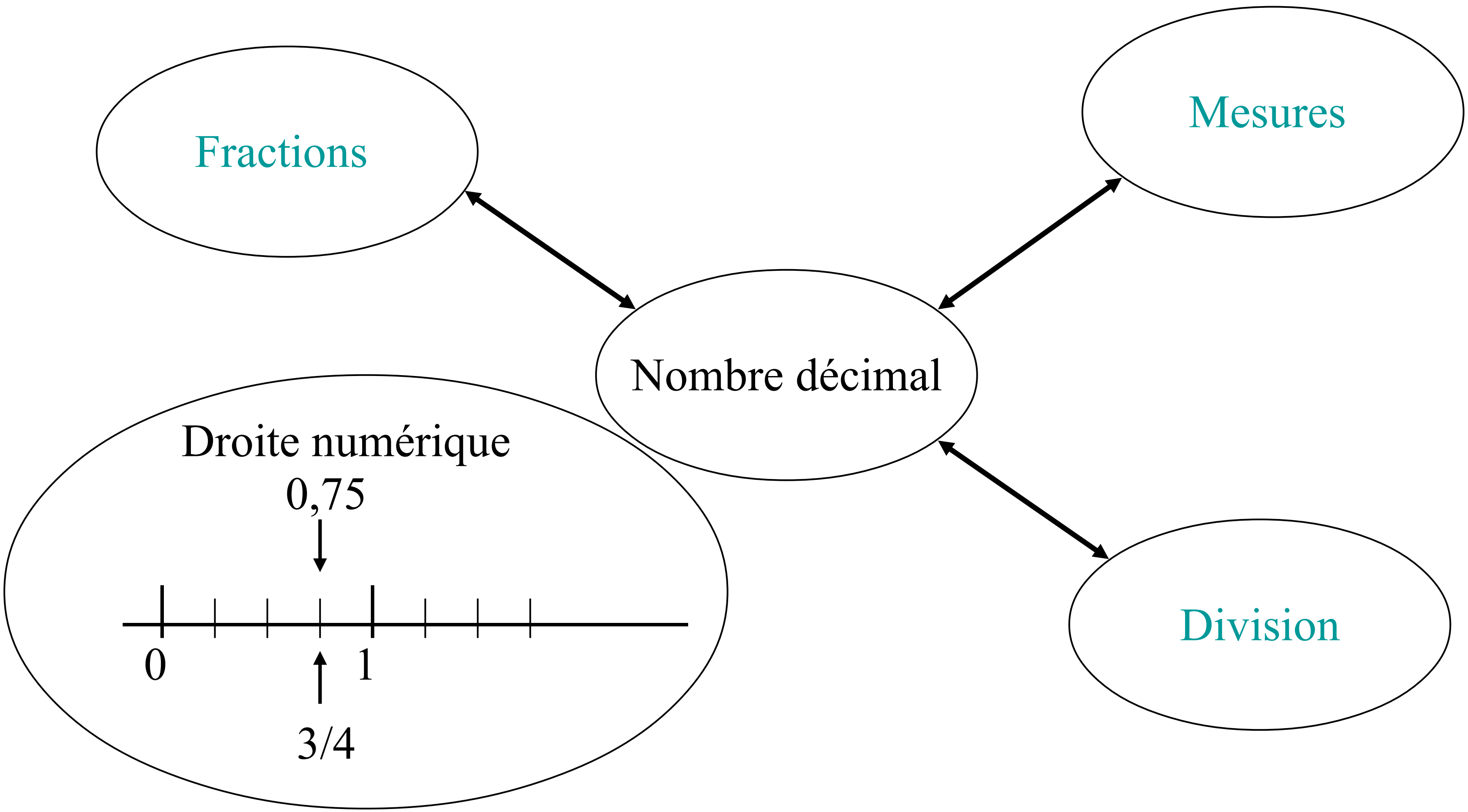
Approche pédagogique :
Etablir des liens entre les nombres décimaux, les fractions, la mesure, la droite numérique…



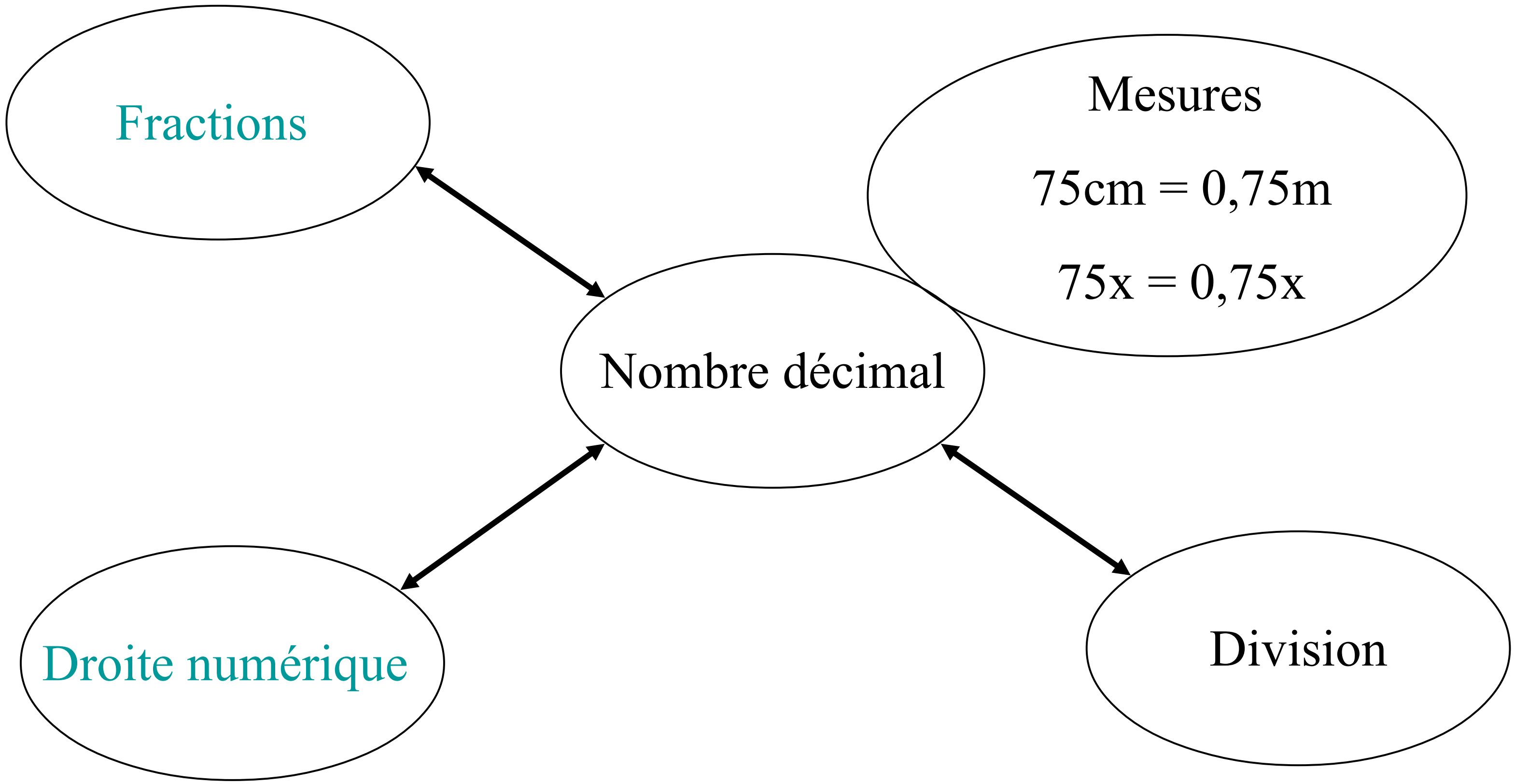
Approche pédagogique :
Etablir des liens entre les nombres décimaux, les fractions, la mesure, la droite numérique…



Approche pédagogique :
Etablir des liens entre les nombres décimaux, les fractions, la mesure, la droite numérique…



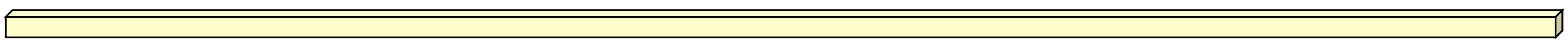
Approche pédagogique :
Etablir des liens entre les nombres décimaux, les fractions, la mesure, la droite numérique…



Nous venons de parler de mesure.

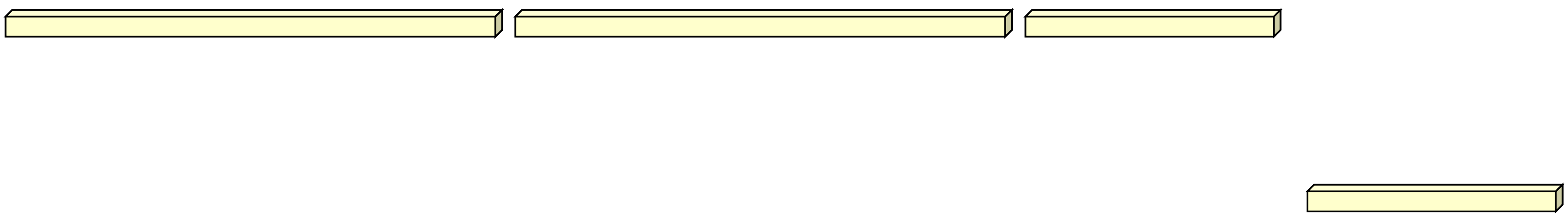
Mais qu'est-ce que mesurer ?

Paul, apprenti charpentier doit découper un liteau de 2,50m dans une barre de 3m.

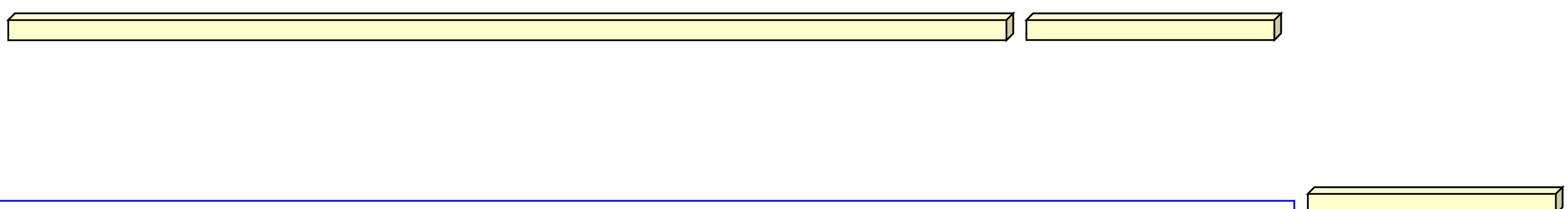


Paul, apprenti charpentier doit découper un liteau de 2,50m dans une barre de 3m.

R1



R2



C’est seulement après avoir compris la relation entre la partie (l’unité de mesure) et le tout (l’attribut mesuré) que les élèves peuvent vraiment saisir le sens d’une mesure quelconque.

Le domaine Mesure est complexe et fait appel à des compétences qui vont au-delà de l’habileté à mesurer à l’aide d’un instrument de mesure tel qu’une règle, un cylindre gradué, un chronomètre ou un thermomètre.

En effet, les élèves doivent aussi apprendre à reconnaître et à <u>comprendre le sens des attributs mesurables d’un objet</u>,

<u>à estimer leur grandeur</u>

<u>et à les mesurer dans divers contextes</u>

afin que le vrai sens de la mesure puisse s’ancrer dans leurs expériences d’apprentissage, et qu’il les aide à résoudre divers problèmes de la vie courante et à prendre des décisions éclairées.


Egypte : île de Rhoda

Le nilomètre

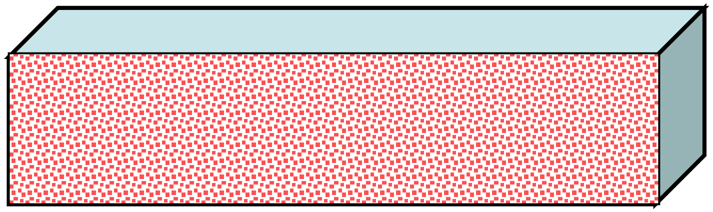
et

la coudée royale

Pour l'attribut *longueur*, les élèves doivent visualiser un espace à une dimension, c'est-à-dire se faire une image mentale d'une ligne droite ou courbe. Par exemple, dans une situation où il est question de déterminer la longueur d'un prisme rectangulaire, ils doivent visualiser qu'il s'agit de déterminer la mesure de l'espace entre les extrémités gauche et droite du prisme.

Les élèves doivent aussi reconnaître que dans certaines situations, l'attribut *longueur* peut prendre un autre nom, par exemple : • la *hauteur* d'une montagne • la *largeur* d'un prisme • l'*épaisseur* d'un gâteau • la *taille* d'une personne • la *profondeur* d'un lac• le *diamètre* d'une roue • le *périmètre* d'une boîte• la *circonférence* d'un verre…

Pour l’attribut surface (aire), les élèves doivent visualiser un espace à deux dimensions, c’est-à-dire se faire une image mentale d’une surface plane ou courbe. Par exemple, dans une situation où il est question de déterminer l’aire d’une des faces d’un prisme rectangulaire, ils doivent visualiser qu’il s’agit de déterminer la mesure de l’espace occupé par la surface de cette face.



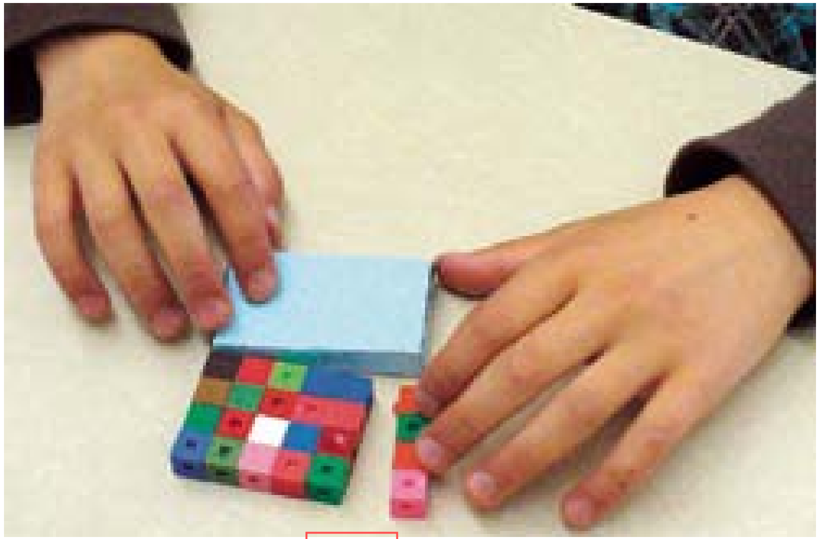
Les élèves doivent aussi reconnaître que dans certaines situations, l’attribut *surface* peut prendre un autre nom, par exemple :

• l’*étendue* d’un terrain;

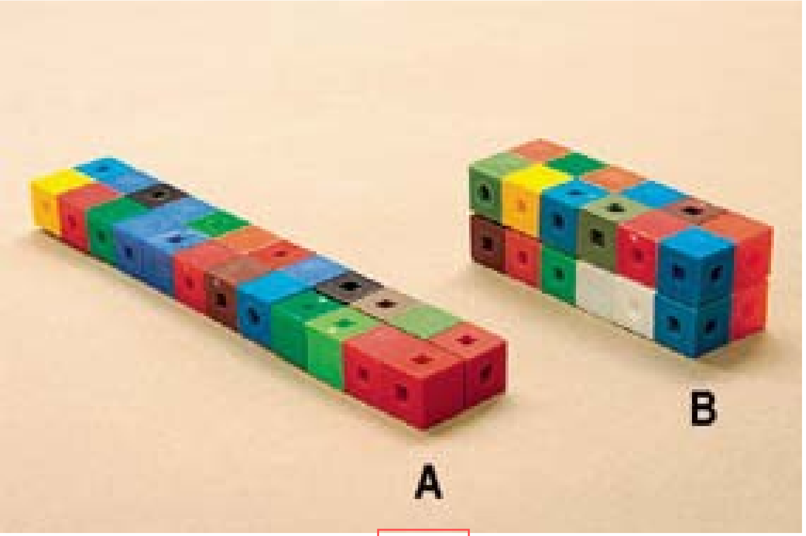
• la *superficie* d’une ville.


le bas
l'aire

Un élève montre sa compréhension du concept de volume en construisant, à l'aide de cubes emboîtables, une structure occupant le même espace que celui occupé par un prisme donné.



1



2

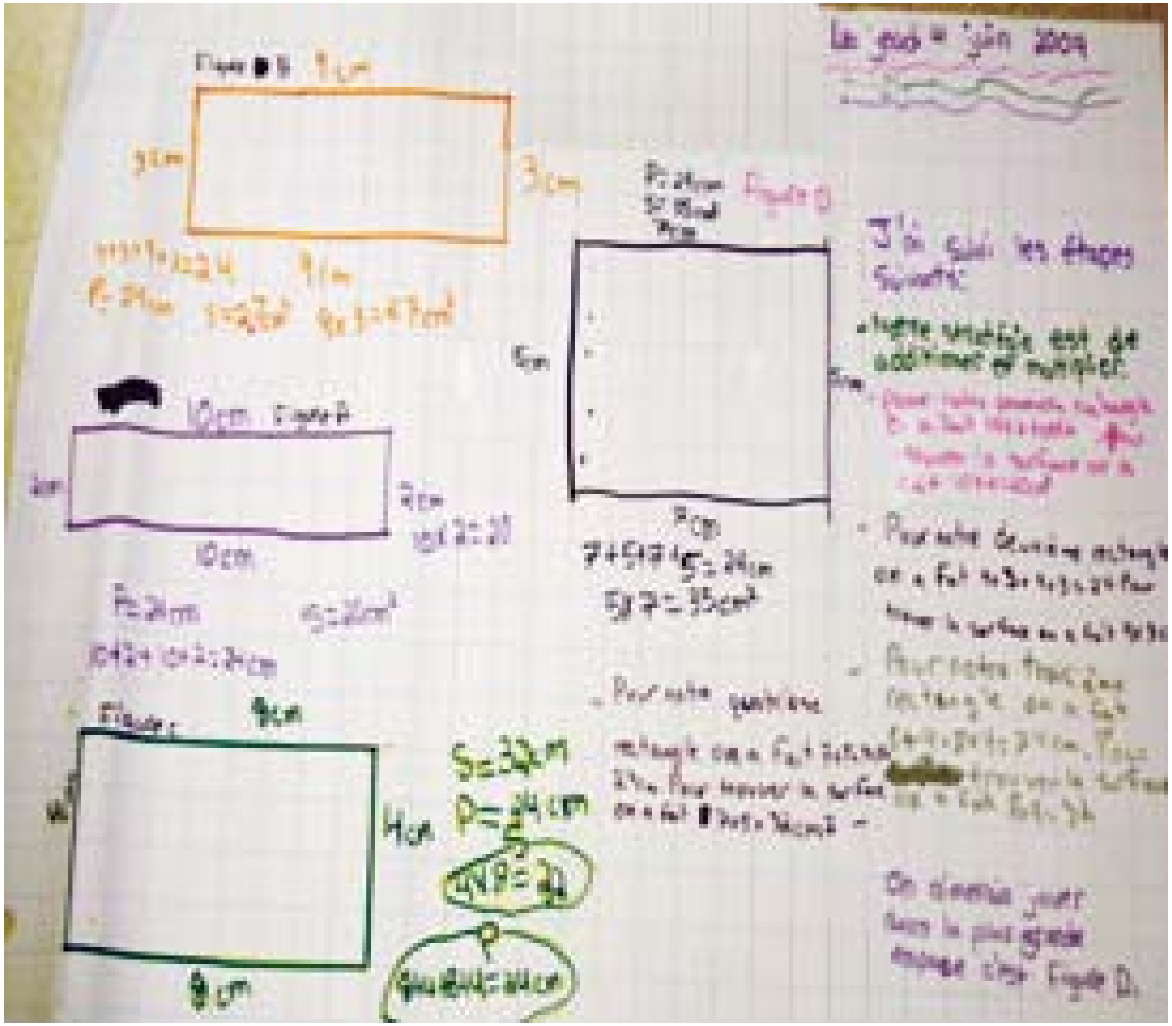
Le développement du sens de la mesure repose sur la compréhension conceptuelle. Les élèves qui ont développé une bonne compréhension conceptuelle en mesure peuvent :

- saisir que mesurer signifie comparer;
- reconnaître qu’il est possible de mesurer plusieurs attributs d’un même objet;
- utiliser des repères personnels appropriés pour chacun des attributs en mesure;
- choisir une unité de mesure appropriée;
- établir certaines relations entre des attributs et entre des unités de mesure.

Pour les élèves, le premier objectif, et le plus important, est de comprendre en quoi consiste l'attribut à mesurer.

Attributs descriptifs	Attributs quantifiables par dénombrement	Attributs quantifiables par une mesure
Couleur	Nombre de faces	Longueur
Texture		Masse
Utilité		Aire
		Capacité
		Volume
		Hauteur
		Diamètre de la base
		Circonférence



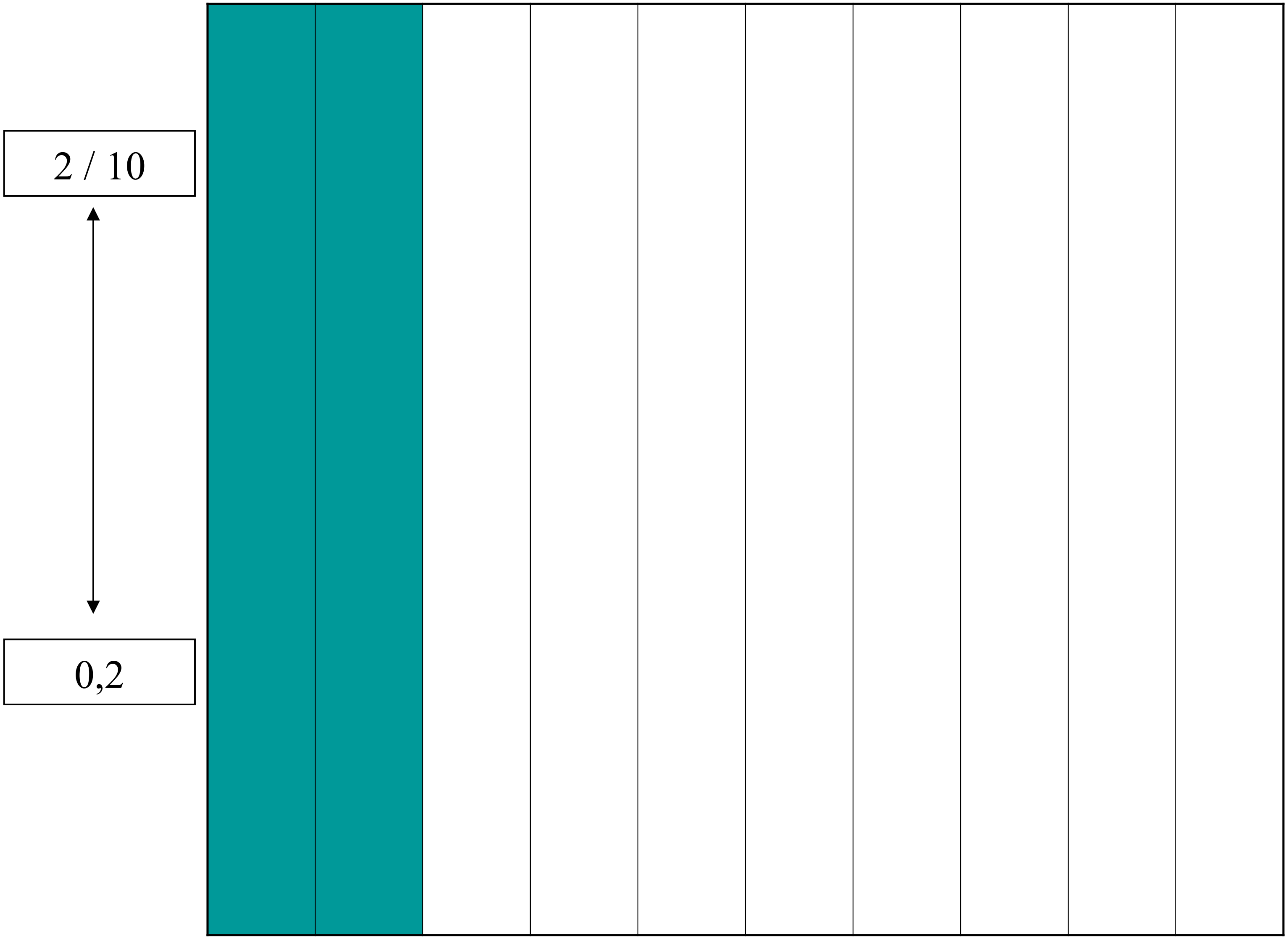



Question de représentation ?

$0{,}2 = 2/10$

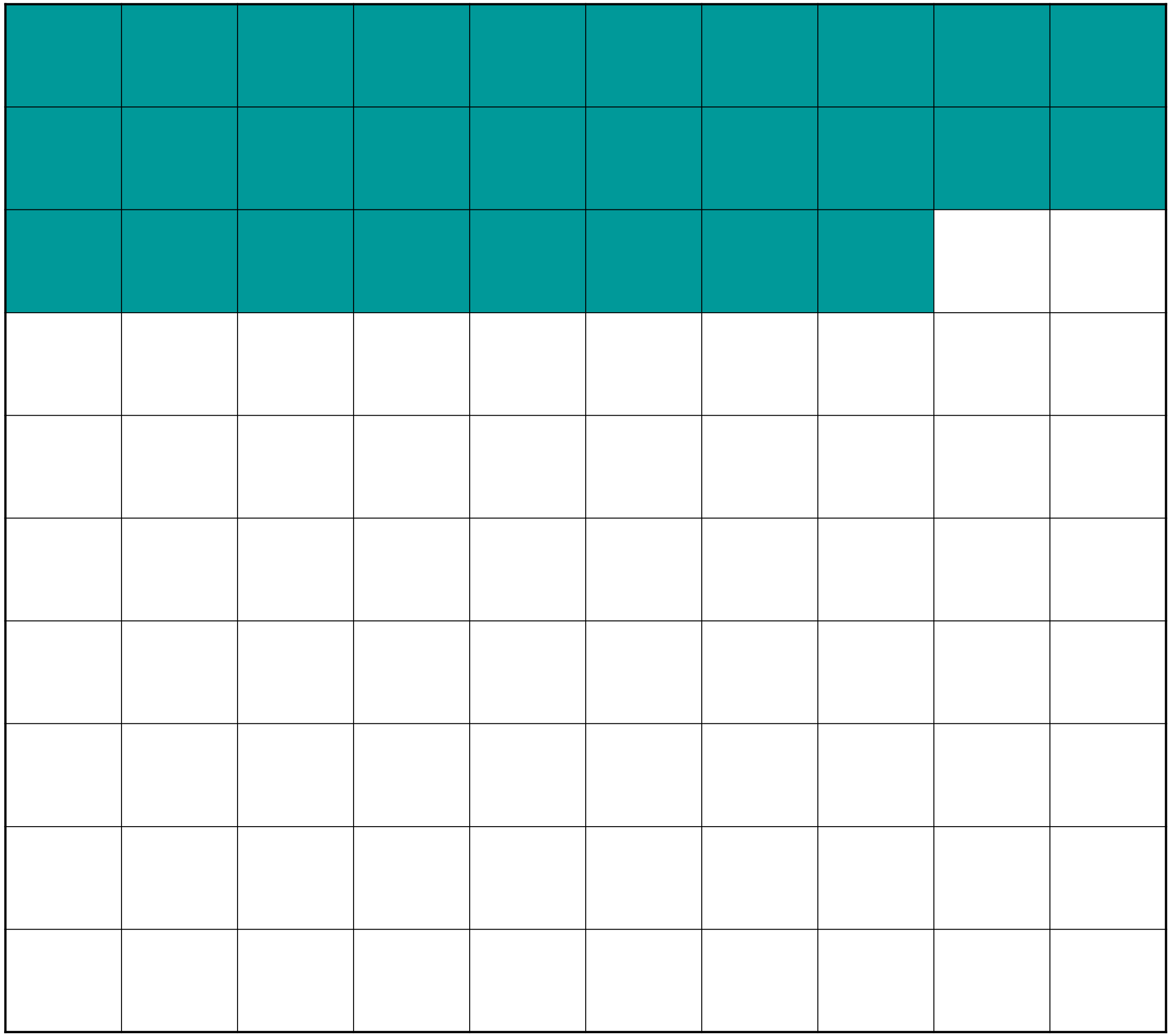
$0{,}20 = 20/100$

$0{,}2 = 0{,}20$?


2 / 10
0,2

0,20

0,28



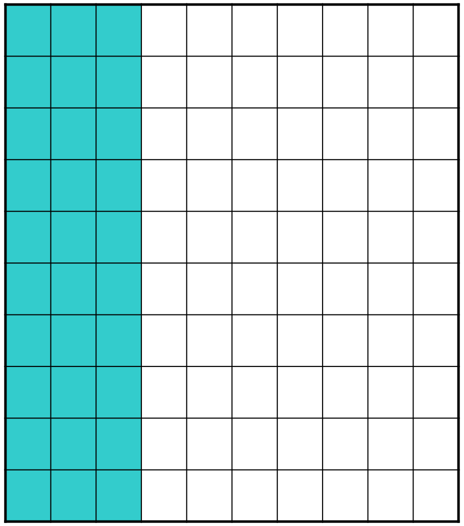
Approche pédagogique :
Etablir des liens entre les nombres décimaux, les fractions, la mesure, la droite numérique…

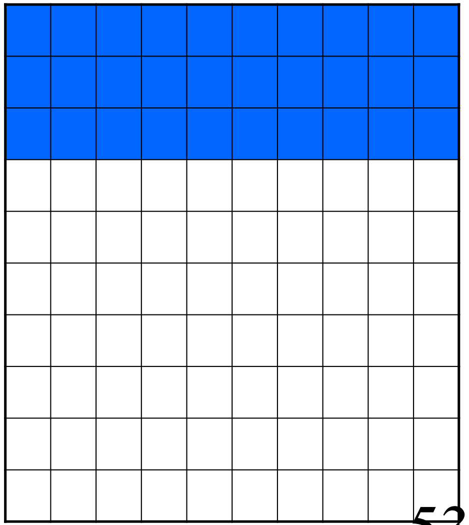
Fractions	Décomposition	Ecriture avec virgule	lecture
$\frac{346}{100}$	$3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100}$	3,46	3 unités et 4 dixièmes et 6 centièmes

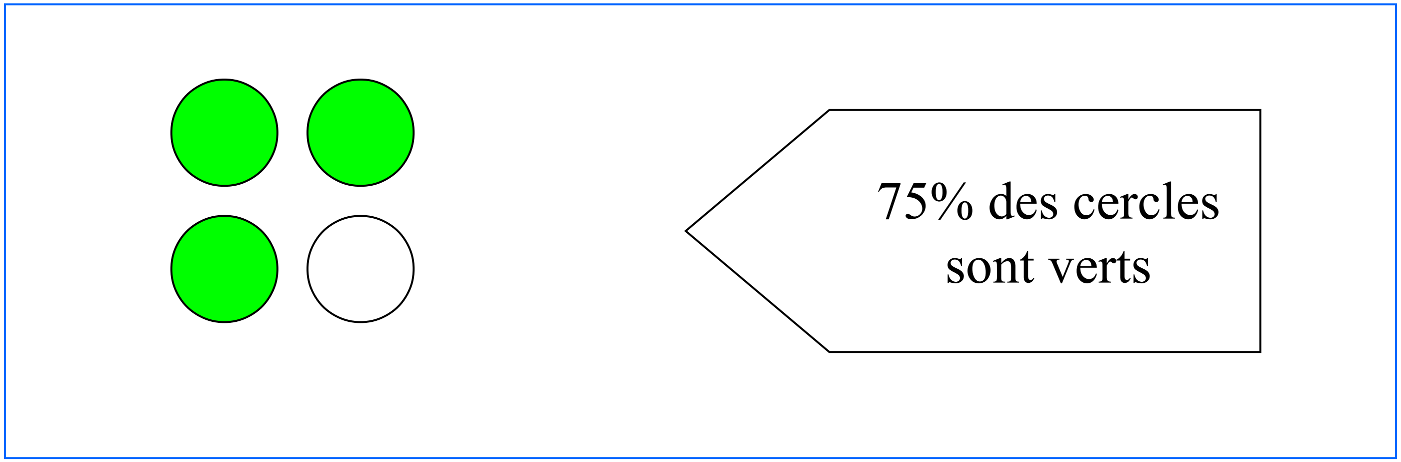
Le pourcentage est une façon particulière de présenter une fraction. Souvent employé dans la vie courante, il mérite une attention particulière.

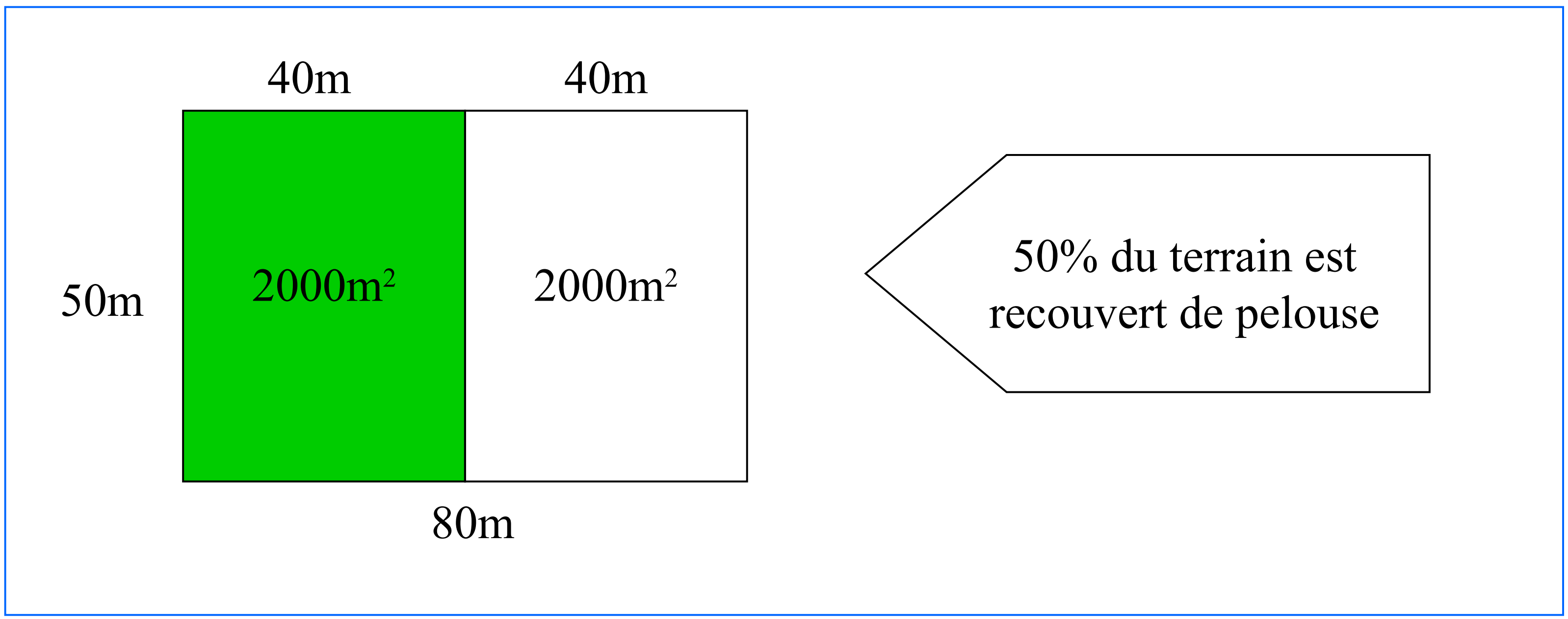
30 % (qui se lit « trente pour cent »)
ou 30/100 ou 0,30.

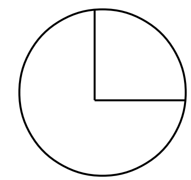
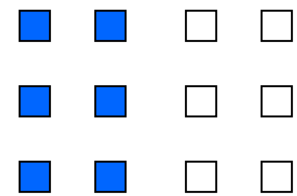
Travail à l'aide de matériel concret ou en représentation.





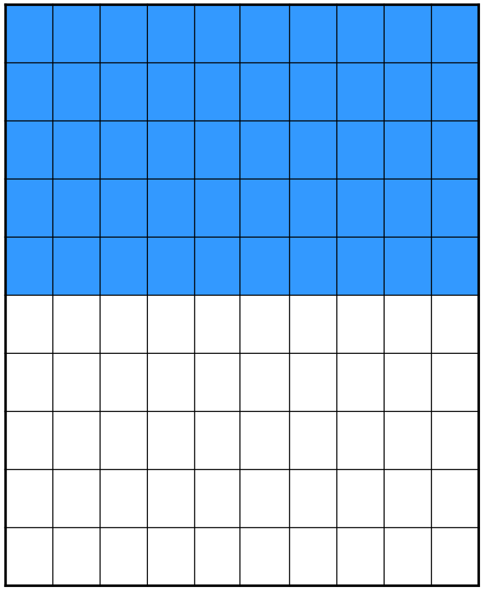

75% des cercles
sont verts

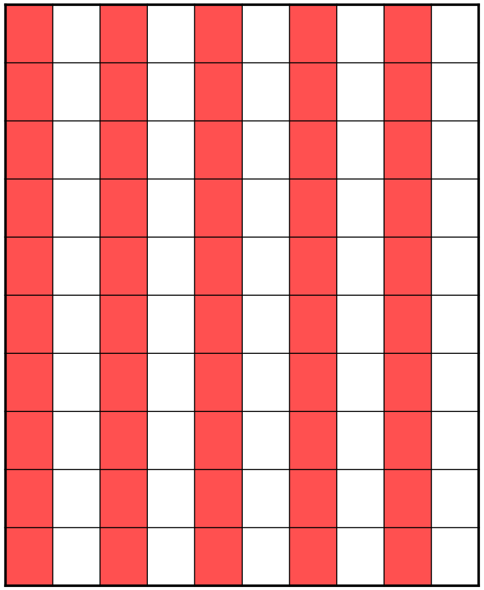

40m
40m
50m
2000m²
2000m²
80m
50% du terrain est
recouvert de pelouse

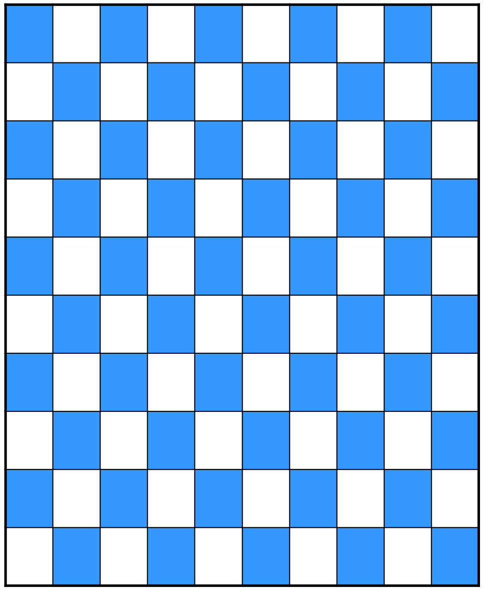
Fraction	Pourcentage	Nombre décimal	Exemple de représentation
1/4	25%	0,25	
1/2	50%	0,5	

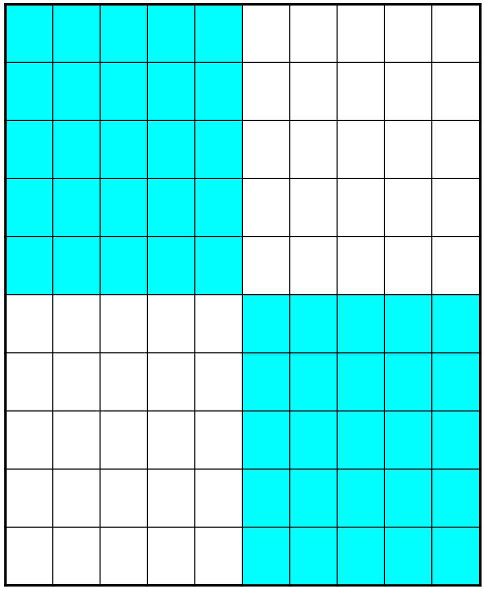
Construire les liens entre les fractions, les pourcentages et les nombres décimaux favorisent l'approfondissement du sens du nombre et s'avèrent fort utiles en situation de résolution de problèmes. Passer d'une notation à une autre est avantageuse, car elle permet d'utiliser celle qui répond le mieux aux besoins du moment.
Par exemple, un client qui veut calculer un rabais de 50 % sur le prix d'un article peut aisément le faire s'il reconnaît que 50 % équivaut à la moitié (1/2).

Pour développer un bon sens du nombre, il est important que les élèves explorent différentes représentations d'une même quantité. Par exemple, on peut les inviter à représenter 0,50 ou 50 % de plusieurs façons sur une grille de 10 × 10.









Qu'il s'agisse des fractions ou des nombres décimaux, ces représentations dont on vient de parler devront être contextualisées !

↓

Résolution de problèmes mathématiques

Annexes...

Une étape cruciale fut de découvrir le zéro… ou plutôt deux étapes…

1. Le zéro apparaît au niveau des notations, c'est alors une symbolique qui ne désigne en réalité qu'une place vide pour une des puissances de la base. Il n'est pas encore un nombre de plein droit…IVème S avt JC en Mésopotamie

2. Pour comprendre la difficulté conceptuelle du zéro, il suffit de réfléchir à comment dénombrer ce qui manque ? Peut-on prendre en compte l'absence de quelque chose et surtout de concevoir que cette absence puisse avoir une puissance opératrice.

Quel géomètre ira se préoccuper d'un segment de longueur nulle ?

Comme l'infini, le zéro fait peur aux grecs.

La première trace du zéro nous parvient des **babyloniens** (3e siècle avant J.C.).

Comment écrire par exemple le nombre « 305 » si on ne dispose pas du symbole « 0 ». On peut écrire « 3 5 », mais ne risque-t-on pas de confondre avec « 35 » ?

les savants **mayas** développeront au cours du 1er millénaire de notre ère un système de numération performant et inventent un « zéro » ….

Mais le coup de génie viendra de l'**Inde** où le zéro apparaît vers le Vème siècle (Hïndi)

Sunya signifie vide en Sanscrit, le zéro est représenté par un petit rond (pourquoi un rond? on ne le sait pas vraiment.).

Traduit en arabe, *sunya* devient *Sifr* (le vide).

A la renaissance le zéro n'est plus seulement un symbole utilisé pour marquer un vide, mais il devient un nombre à part entière.

- Zéro-chiffre
- Zéro-nombre
- Zéro-origine

$$0^0 =$$

?

$$0^1 =$$

3 5/3

- 49 45,068

√2

256 $7^{0,75}$