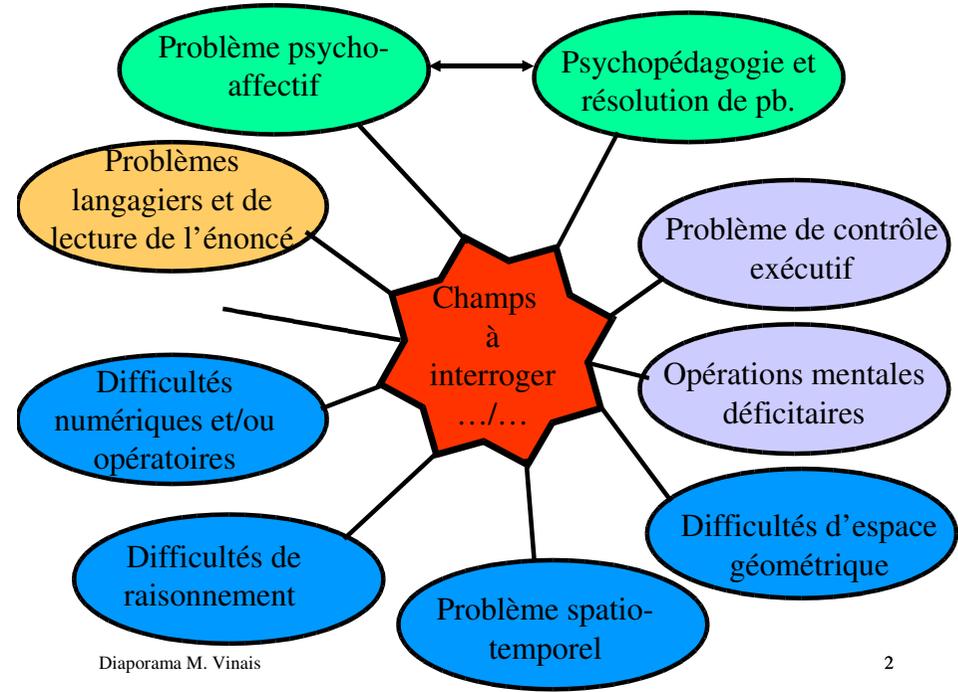


Module « dyscalculie »

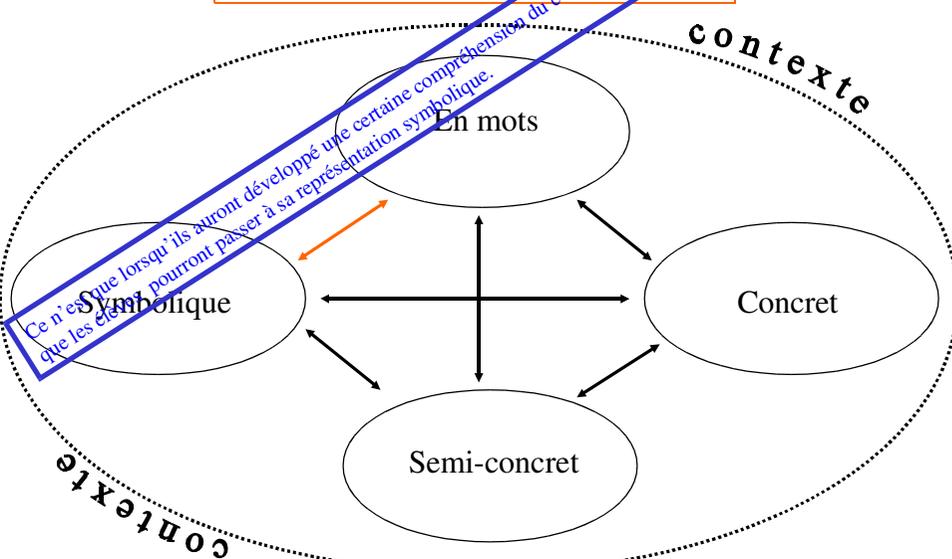
La conquête du nombre et ses difficultés.
Construction des données numériques au cours des cycles des apprentissages.
Comprendre pour intervenir...



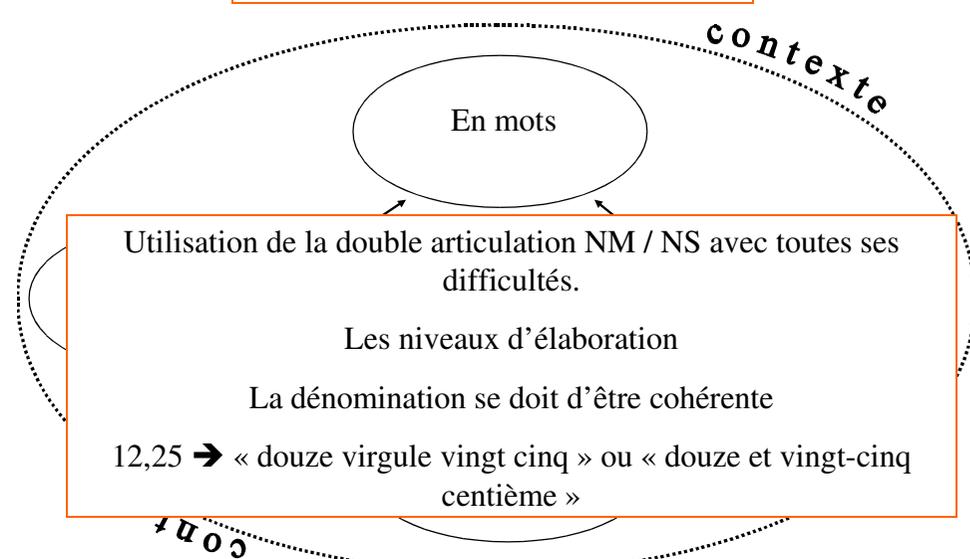
Michel VINAIS
Ancien responsable filière ASH.- Université d'Orléans
Chargé de cours IFUCOME - Université d'Angers
michelvinais@orange.fr



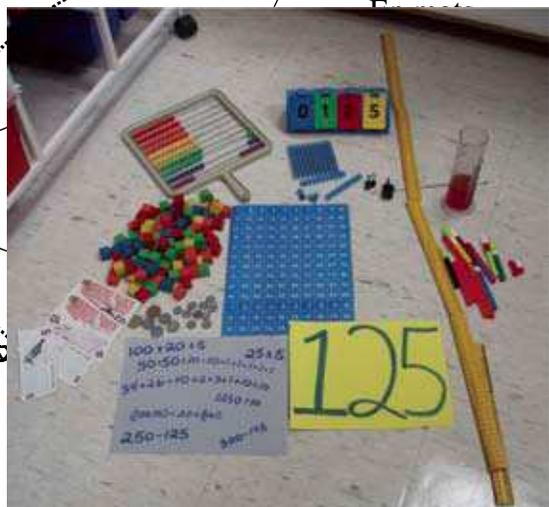
Modes de représentation



Modes de représentation



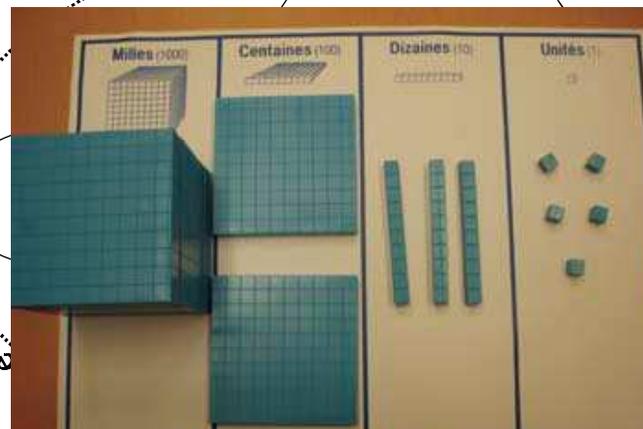
Modes de représentation



Concret

5

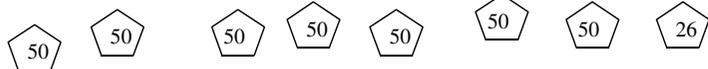
Modes de représentation



Concret

La représentation est ___ unité(s) de mille, ___ centaine(s), ___ dizaine(s) et ___ unité(s).

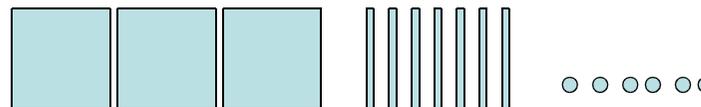
Modes de représentation



Un nombre peut être représenté par des dessins de façon à illustrer certains regroupements.

Semi-concret

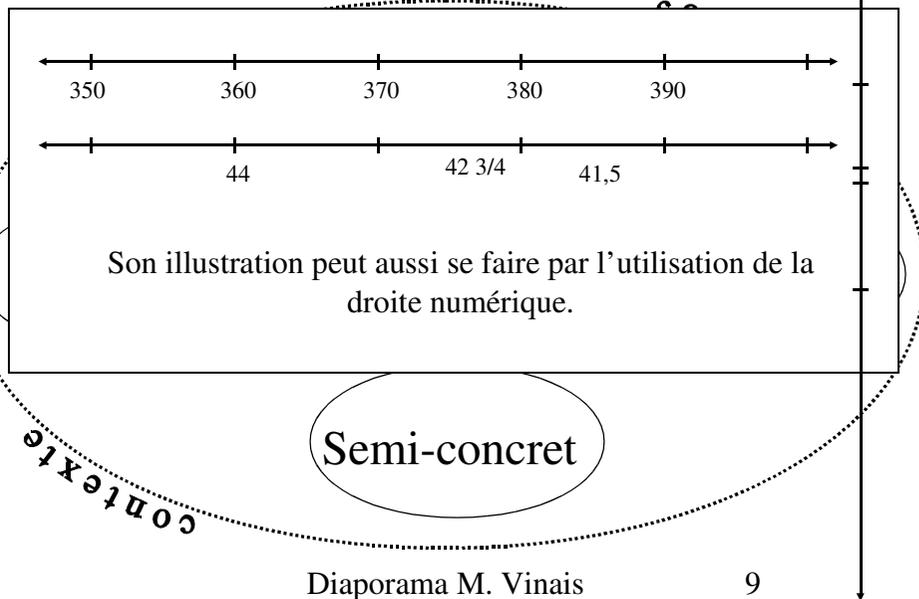
Modes de représentation



Son illustration peut aussi être en lien avec le matériel de manipulation.

Semi-concret

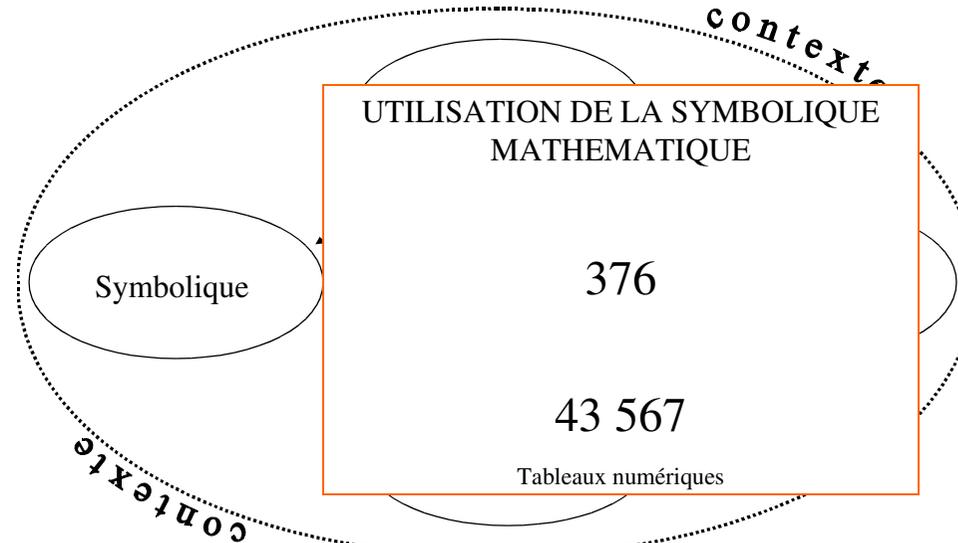
Modes de représentation



Diaporama M. Vinais

9

Modes de représentation



Diaporama M. Vinais

10

Des problèmes langagiers...

Des mots et des maths

Dans *Alice au pays des merveilles*, Lewis Carroll fait dire au taon :

Le taon : « *Est-ce que les insectes répondent à leur nom ?* »

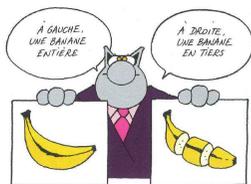
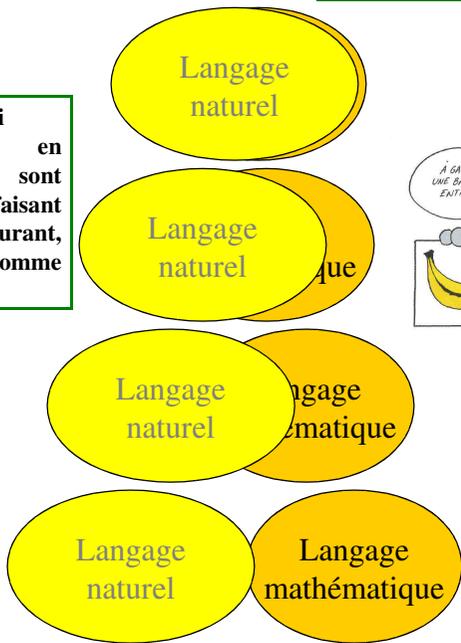
Alice : « *Pas à ma connaissance* »

Taon : « *A quoi ça leur sert, alors, d'avoir des noms si ce n'est pas pour y répondre ?* »

Alice : « *A eux ça ne sert à rien mais j'imagine que cela a une utilité pour les gens qui les nomment. Autrement pourquoi les choses auraient-elles des noms ?* »

Des mots et des maths

Parmi les mots qui apparaissent en mathématique, certains sont considérés comme faisant partie du langage courant, d'autres sont ressentis comme mathématiques.



Le mot-nombre, un mot particulier



Vache

Arbre

Mouton

Le mot désigne l'objet, l'animal....

Le mot-nombre, un mot particulier



Trois

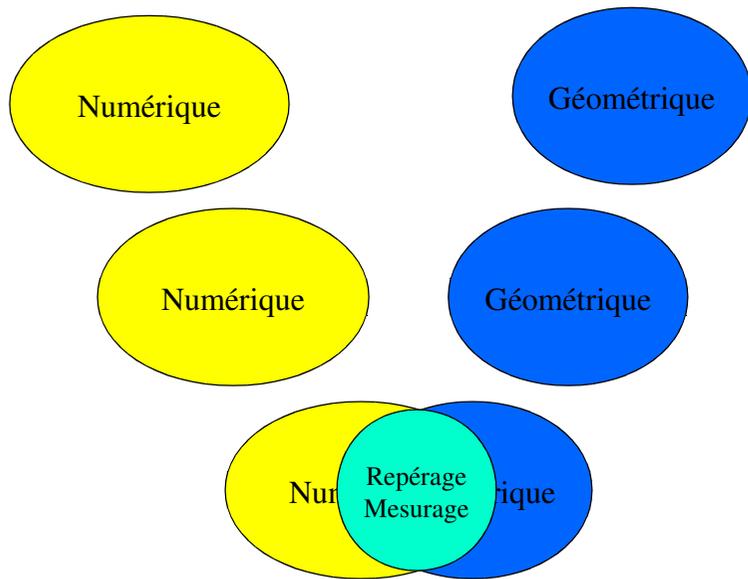
Quatre

Le mot-nombre désigne l'ensemble (numérique) de

Sept

Identifier le domaine travaillé...

...ainsi que les exigences



Qu'est-ce qu'un nombre ?

Plusieurs approches peuvent être envisagées pour tenter de répondre à cette question ; trois me semblent essentielles.

- Il est possible d'interroger les mathématiques elles-mêmes.
- Il est possible de se demander ce que la psychologie, tant des profondeurs que cognitive peut nous apprendre en ce qui concerne cette question.
- Il est enfin possible de questionner l'histoire comparée des différentes réponses développées par les diverses civilisations au cours des siècles, des millénaires. 

G. Ifrah parle de : "L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul."

Éléments d'histoire sur la numération (1)

Il a fallu plusieurs millénaires et le travail de plusieurs civilisations (*Maya, Babylonienne, Aztèque, Chinoise, Grecque, Egyptienne, Romaine, Indienne, Arabe...*) pour qu'un système de numération apportant une utilisation correcte et collective voit le jour.

- **Les 1ers nombres plutôt "sentis" qu'abstraites**
- **Premiers "lieux d'écriture" des nombres**
- **Des cailloux pour compter**

Éléments d'histoire sur la numération (2)

- **Un important apport : les bases.**

L'homme a une capacité instinctive à grouper les objets afin de les classer, les distinguer. C'est également ce qu'il a fait pour développer ses systèmes de numération...

- **Parce qu'il sut compter, l'homme apprit à écrire**
- **Vers la numération de position:** 
- **La découverte du Zéro:**
- **L'Inde, berceau de notre numération moderne.**

Chronologie...

XVI/XVII S	Invention de la notation littérale. Émergence du concept d'infini
XV/XVI S	Avec l'usage de l'imprimerie les chiffres indo-arabes acquièrent leur graphie définitive
X S	Chiffres Ghubar dans le Maghreb
VIII S	Arrivée du calcul indien à Bagdad
IV S	Numération décimale de position indienne avec zéro
- II S	neuf chiffres Brahmis
- III S	Premier zéro de l'histoire de la numération
- IV S	Concept d'infini Aristote
- 1800	Première numération de position
- 2 000	Apparition de la base décimale
- 8 000	Apparition des <i>Calculi</i> en Mésopotamie
- 30 000	Présence d'entailles numériques

Invention de l'écriture

« Tout sujet apprenant le nombre doit se poser naturellement les mêmes questions que ses inventeurs pour le comprendre. »

L'apport du constructivisme

On admet que la plupart des connaissances (savoirs et savoirs-faire) ne sont ni reçues du milieu par un organisme passif, ni pré-programmées à la naissance de telle façon que le sujet se les approprierait nécessairement. Ces connaissances sont construites par le sujet dans le cours de son activité.

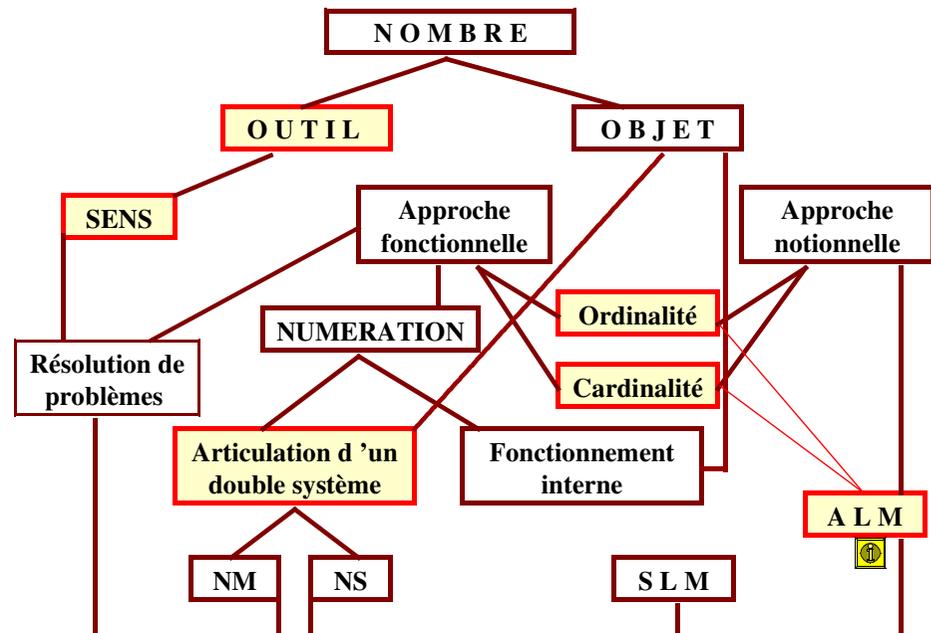
La place du calcul dans la construction du nombre

Deux thèses modernes concernant le calcul :

1. le calcul comme accélérateur d'apprentissage du comptage, donc la nécessité de développer des compétences dès le plus jeune âge. (R. Brissiaud et...)

2. le comptage doit précéder les activités de calcul (en référence aux cinq principes). *Gelman* et bien d'autres... :

* attention, le calcul dont il est question n'est pas l'algorithme de l'addition par sur-comptage, mais plutôt la perception d'une quantité par la somme de ses parties (voir les constellations, les livres à compter...les cartes à points de *JL Brégeon*)



La question du sens ...

BO Nov. 2015 C2

« le sens et l'automatisation se construisent simultanément. La compréhension est indispensable à l'élaboration de savoirs solides que les élèves pourront réinvestir et l'automatisation de certains savoir-faire est le moyen de libérer des ressources cognitives pour qu'ils puissent accéder à des opérations plus élaborées et à la compréhension. »

Approche Institutionnelle	Numération Orale	Numération Ecrite
M. Fayol	Numération Lexicale	Numération Syntaxique
S. Baruk	Langue Numérale	Langue Numérique
INS HEA	Numération Mots	Numération Ecrite

Diaporama M. Vinais

25

Diaporama M. Vinais

26

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles		
Algorithme		
Base		
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	
Algorithme		
Base		
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme		
Base		
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	
Base		
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base		
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		



Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro		
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systématique et fondamental
Valeur positionnelle		
Ordre de grandeur		

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systématique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

Incidences sur les apprentissages...

BO Mars et Novembre 2015 : « Apprendre en s'exerçant...
Apprendre en se remémorant et en mémorisant »

Dans N+ pour compter de 1 à 1M	N Mots	N Signes
Nombre de symboles	25 mots mais...	10 chiffres
Algorithme	Non algorithmique	Parfait et constant
Base	Pas de base marquée	B10
Utilisation du zéro	Pas d'oralisation dans l'énonciation	systematique et fondamental
Valeur positionnelle	*Trente douze *quatre vingt six	Suite de chiffres = nombre
Ordre de grandeur	Nombre de mots pas indicateurs	

	10 ju	20 niju	30 sanju
1 ichi	11 juichi	21 niyuichi	31 sanjuichi
2 ni	12 juni	22 nijuni	32 sanjuni
3 san	13 jusan	23 nijusan	33 sanjusan
4 shi	14 jushi	24 nijushi	34 sanjushi
5 go	15 jugo	25 nijugo	35 sanjugo
6 roku	16 juroku	26 nijuroku	36 sanjuroku
7 sichi	17 jusichi	27 nijusichi	
8 hachi	18 juhachi		
9 ku			

Si la perspective piagétienne comporte des éléments forts intéressants quant à la construction du nombre, des recherches plus récentes apportent des éclairages là où la théorie piagétienne est lacunaire et ce particulièrement sur la période précédant la maîtrise opératoire du nombre. En particulier un certain nombre de travaux :

Gelman et Gallister, Meck ... à partir de 1978

Wagner et Walter 1982 Ginsburg 1982

K. Fuson et al. 1982 / 1988 / 1991

Baroody 1987 1991 Steffe 1991 .../...

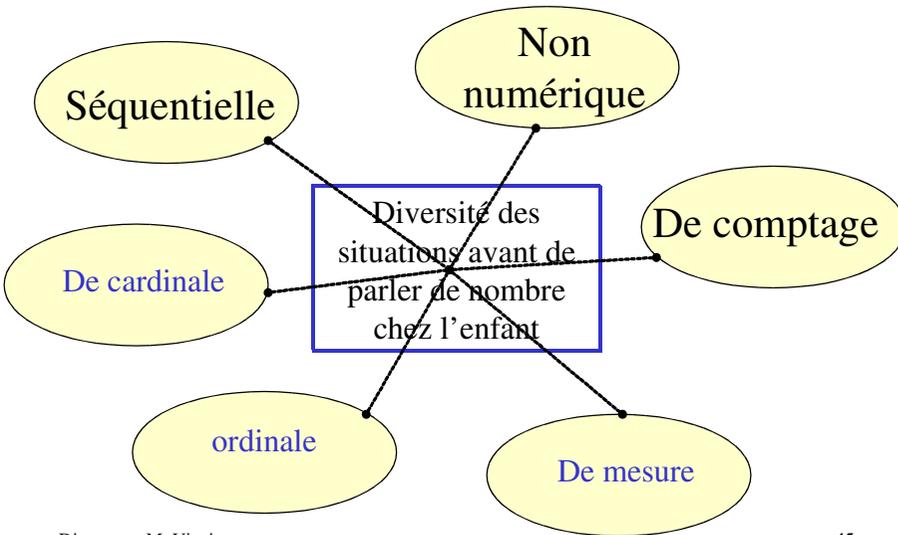
J. Bideaud / H. Lehalle 2000...

Les savoirs spontanés des enfants

- *Existence précoce des mots pour compter*
- *C'est par l'aspect verbal de la numération que l'enfant aborde notre système numérique*
- *C'est d'abord un savoir par cœur, inutilisable dans un immédiat temporel*
- *Le chemin sera long avant de parvenir à une première maîtrise de la numération. Elle s'étalera sur environ 4 années, répartie approximativement de 2 à 6 ans.*
- *Ce savoir à l'état brut va devoir être travaillé, policé.*

K.Fuson (1988) fait remarquer que bien avant d'arriver à construire le nombre du point de vue logique, l'enfant rencontre les mots-nombres dans une variété de situations entre lesquelles il va progressivement établir des liens.

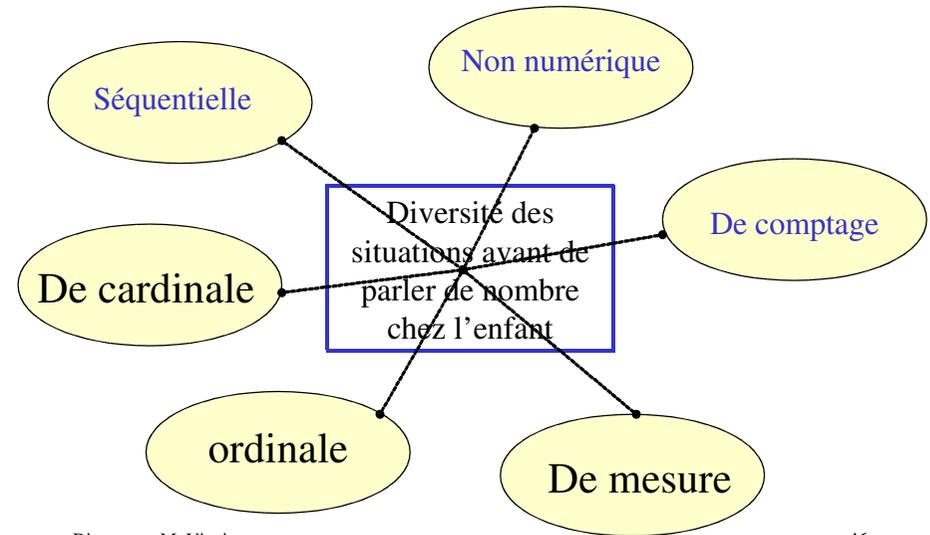
K.Fuson (1988) Ces situations seraient de 6 types :



Diaporama M. Vinais

45

K.Fuson (1988) Ces situations seraient de 6 types :



Diaporama M. Vinais

46

Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale.

K. Fuson & al (1982)

- **La chaîne chapelet (String level)**
- La chaîne insécable (liste non sécable)
- La chaîne sécable
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

Diaporama M. Vinais

47

Chaîne chapelet

Undeuxtrosquatrecinq !



Diaporama M. Vinais

48

Situations de comptage pour la segmentation..

Un enfant seul :

- Compter le plus loin possible.
- Dire un nombre fort, le suivant faible
- Dire un nombre, taire le suivant
- Compter le plus loin possible en frappant sur ses propres énonciations.
- Compter le plus loin possible en frappant entre ses propres énonciations.
- .../...

Compter à deux (enfants entre eux ou enfant/adulte) :

- Compter en alternance
- Frapper sur les dires de l'autre.
- Compter le plus loin possible sur les frappés de l'autre.
- Énoncer deux nombres consécutifs.

Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale.(1)

K. Fuson & al (1982)

- La chaîne chapelet (String level)
- **La chaîne insécable(liste non sécable)**
- La chaîne sécable
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

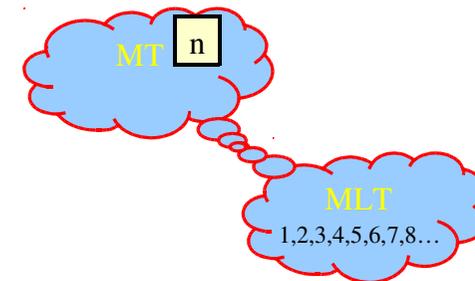
- * Compter jusqu'à n
 - * Livrer le successeur d'un nombre
 - * Première procédure de quantification par comptage
- Premiers problèmes math.

Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

- * Compter jusqu'à n (n appartenant à ZSE)

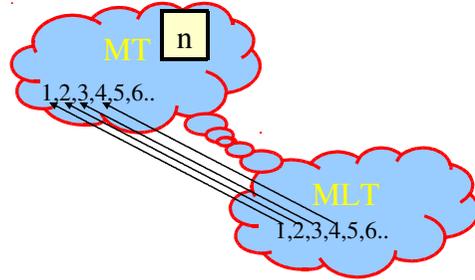


Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

* Compter jusqu'à n

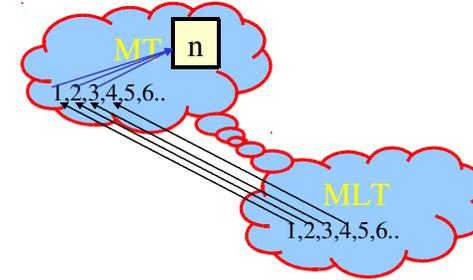


Chaîne Insécable

Un deux trois quatre cinq ...

2 habiletés nouvelles :

* Compter jusqu'à n



Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale (2)

K. Fuson & al (1982)

- La chaîne chapelet (String level)
- La chaîne insécable (liste non sécable)
- **La chaîne sécable**
- La chaîne terminale (chaîne dénombrable)

Chaîne sécable

Sept, huit, neuf, dix, onze, douze....

Développement de nouvelles habiletés :

- * Compter à partir de x
- * Compter de x à y
- * Comptage par bonds
- * Compter à rebours
- * Livrer le prédécesseur d'un nombre

Les 4 niveaux d'élaboration de la chaîne numérique verbale (2)

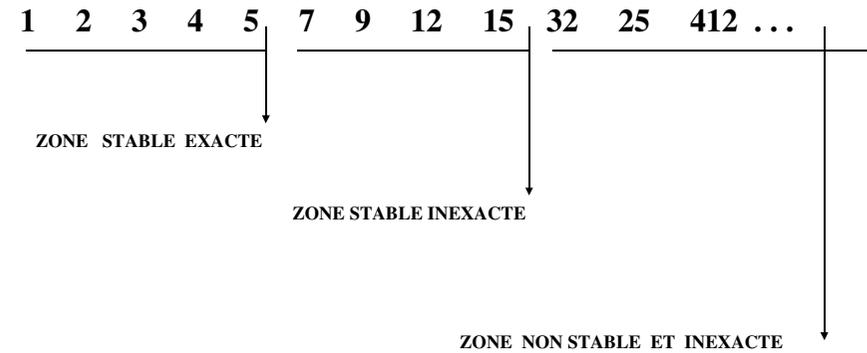
K. Fuson & al (1982)

- La chaîne chapelet (String level)
- La chaîne insécable(liste non sécable)
- La chaîne sécable
- **La chaîne terminale (chaîne dénombrable)**

Diaporama M. Vinais

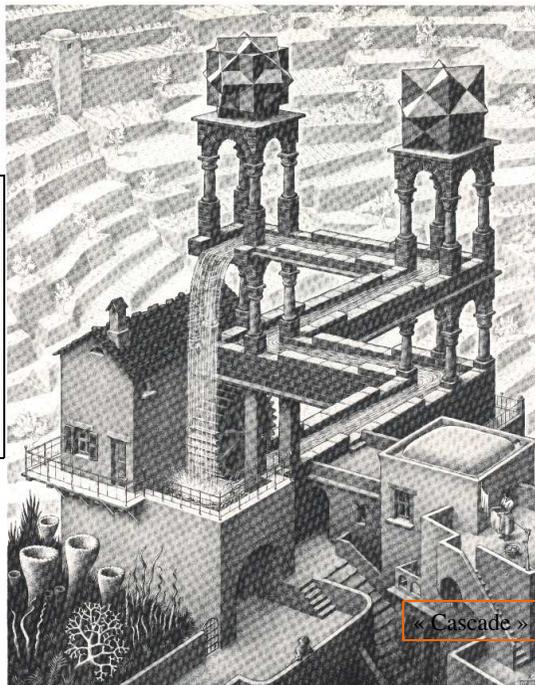
57

Différentes zones dans la chaîne insécable.



Diaporama M. Vinais

58



Le champ du
numérique
et
des passages
obligés et parfois
difficiles

« Cascade » MC Escher

Diaporama M. Vinais

59

Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

NB : selon le niveau de développement des compétences des élèves, d'autres procédures de quantification vont voir le jour c'est la capacité à agir sur le numérique : addition, soustraction....

Diaporama M. Vinais

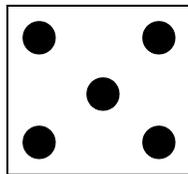
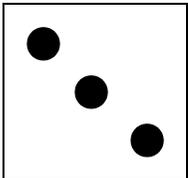
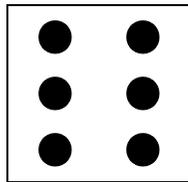
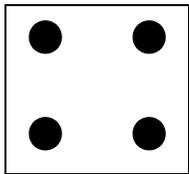
60

Les procédures de quantification.
(Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage. (Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

Les procédures de quantification.
(Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
 - Configurations figuratives
 - Configurations non-figuratives



Ali

Est-ce que tu peux dire trois ?

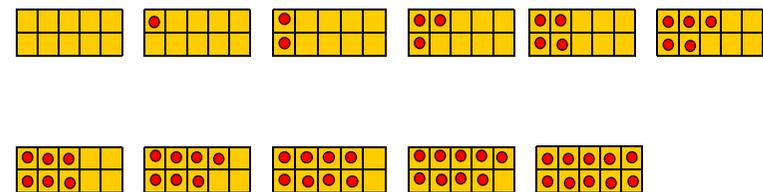
	Oui <input checked="" type="checkbox"/>	Non <input type="checkbox"/>	Si oui, Trois <i>couleurs</i>
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois <i>flèches</i>
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois

Le matériel de base des cartes à points est constitué des 11 grilles suivantes

Camila

Est-ce que tu peux dire trois ?

	Oui <input checked="" type="checkbox"/>	Non <input type="checkbox"/>	Si oui, Trois <i>couleurs</i>
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois <i>fruits</i>
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois <i>animaux</i>
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois <i>flèches</i>
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois <i>vélos</i>
	Oui <input type="checkbox"/>	Non <input checked="" type="checkbox"/>	Si oui, Trois



Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.

Procédure de quantification



Le comptage est la procédure de base permettant d'évaluer de manière très précise des collections dont la taille importe peu. Il semble se manifester très tôt chez l'enfant. Pourtant on relève de nombreuses erreurs: on a à faire à des sujets qui à la fois savent et ne savent pas compter.

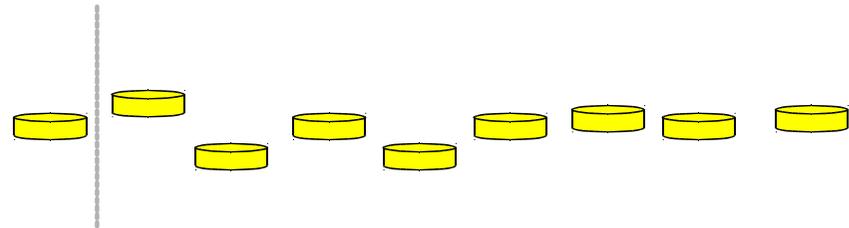
Procédure de quantification

1. Type de difficulté rencontrée



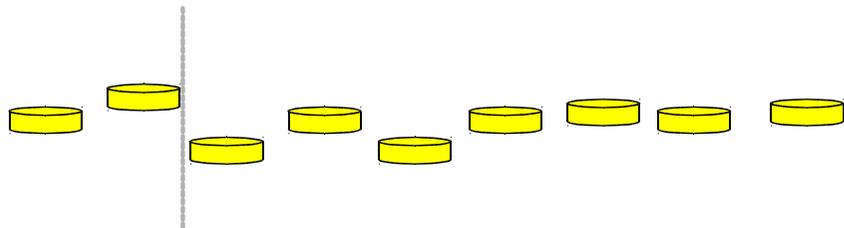
Combien y a t-il de jetons?

Procédure de quantification



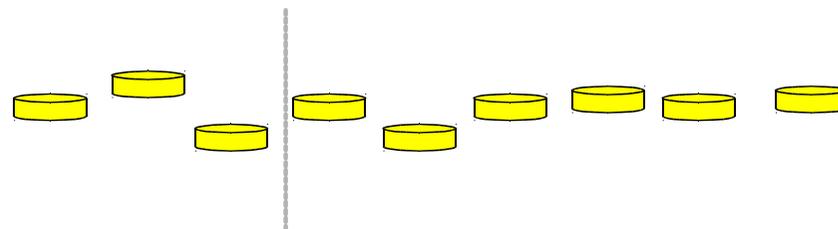
Combien y a t-il de jetons?

Procédure de quantification



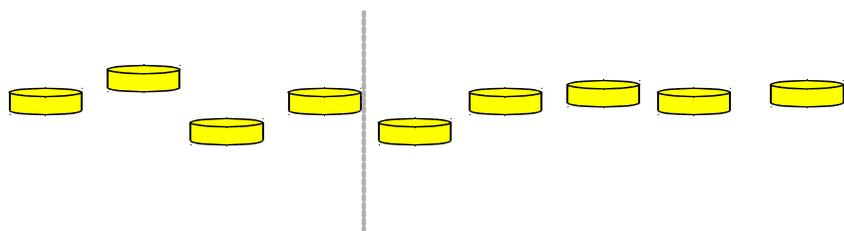
Combien y a t-il de jetons?

Procédure de quantification



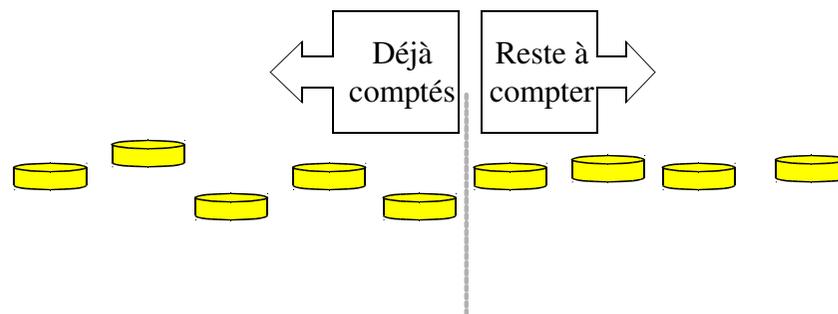
Combien y a t-il de jetons?

Procédure de quantification



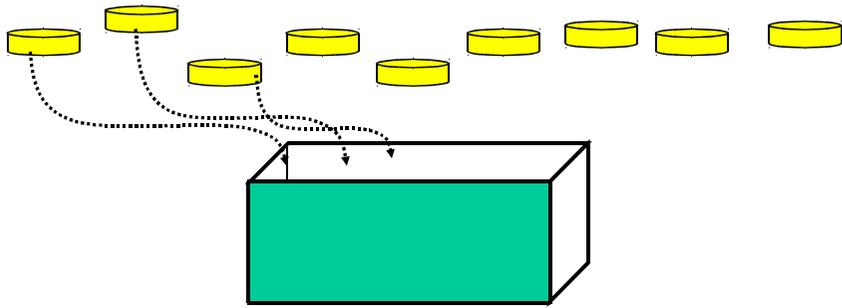
Combien y a t-il de jetons?

Procédure de quantification



Combien y a t-il de jetons?

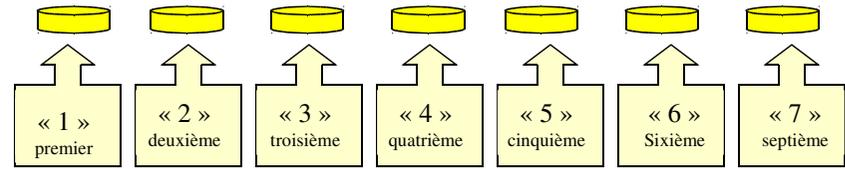
Procédure de quantification



Combien y a-t-il de jetons?

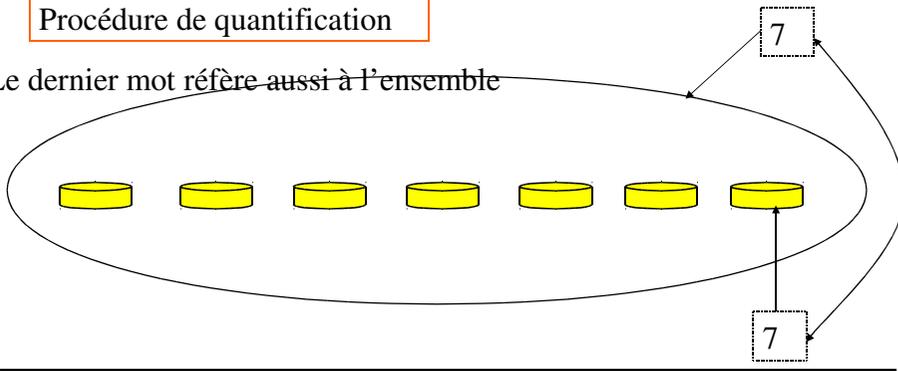
Procédure de quantification

2. Type de difficulté rencontrée



Procédure de quantification

Le dernier mot réfère aussi à l'ensemble



Accepter de conceptualiser contre une connaissance... donc de « force », par répétition ou imitation
La question du combien...

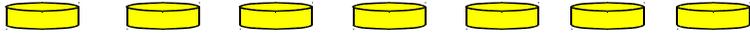
= ?

BO Mars et Novembre 2015 : les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage et faire apparaître, lors de l'énumération de la collection, que chacun des noms de nombres désigne la quantité qui vient d'être formée (**l'enfant doit comprendre que montrer trois doigts, ce n'est pas la même chose que montrer le troisième doigt de la main**).

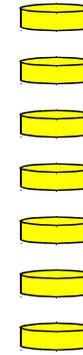
Procédure de quantification



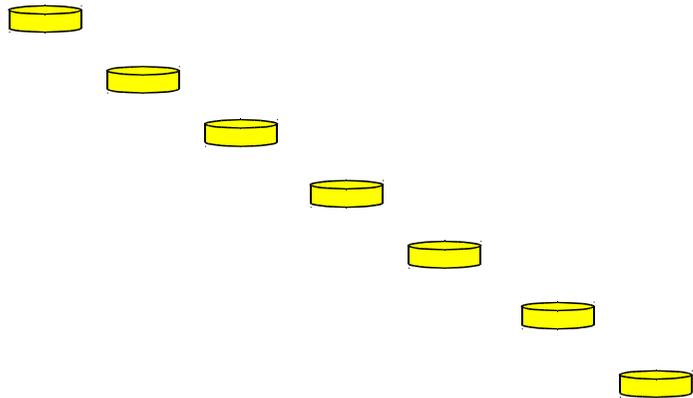
Collections homogènes organisées ...en lignes



Collections homogènes en colonnes

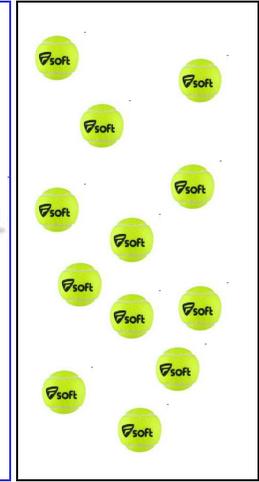
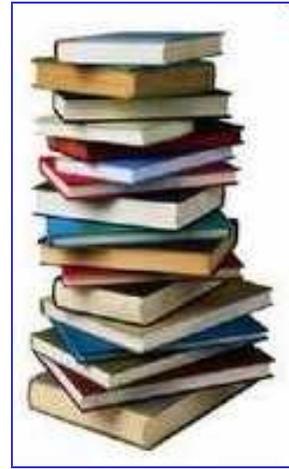


Collections homogènes « obliques »



Les procédures de quantification. (Klarh et Wallace)

- Le subitizing ou aperception globale.
- Le comptage.(Dénombrement par comptage?) Difficultés?
- L'estimation globale.



Que retenir des principes de Gelman ?

R. Gelman tend à montrer que l'activité de dénombrement est susceptible d'être analysé et dissocié en composantes plus élémentaires. Cette compétence fait appel à 5 principes.

- Principe d'ordre stable
- Principe de bijection de n éléments
- Principe de cardinalité
- Principe d'abstraction
- Principe d'ordre quelconque

R. Gelman montre que très tôt les enfants respectent chacun de ces principes pris isolément et qu'ils éprouvent des difficultés à les coordonner. Coordination nécessaire pour être opératoire dans l'activité de dénombrement.

NB : travaux de Baroody...

Autres observations et rappels

L'invariance du nombre.

Alors que l'on (JPiaget, P. Gréco) a longtemps considéré les activités de dénombrement comme secondaires par rapport au caractère fondamental de la conservation des quantités discontinues, de nouvelles approches (Pénnington, J Grégoire...) nous amènent à une plus grande mesure. Il a été mis en évidence que:

- Le développement des habiletés numériques ne dépendrait pas de l'accès préalables à la conservation du nombre mais plutôt à une stabilité des images mentales...
- Autre constat : le fait d'inciter des sujets à quantifier par comtage avant de les soumettre aux épreuves de conservation (dont ils ne sont pas avertis) entraînerait une amélioration très sensible et systématique des performances (Cf K Fuson)
- Problème de la quotité et de la quantité mis en évidence par P. Gréco
- Dès lors, le problème de la conservation ne semblerait plus devoir se poser. Et pourtant....

Aperçu de la théorie "constructive" de Von Glaserfeld.

(Steffe et Glaserfeld 1985)

L'opération unifiante :

Il n'y aurait pas de nombre possible sans la construction mentale de la totalité.

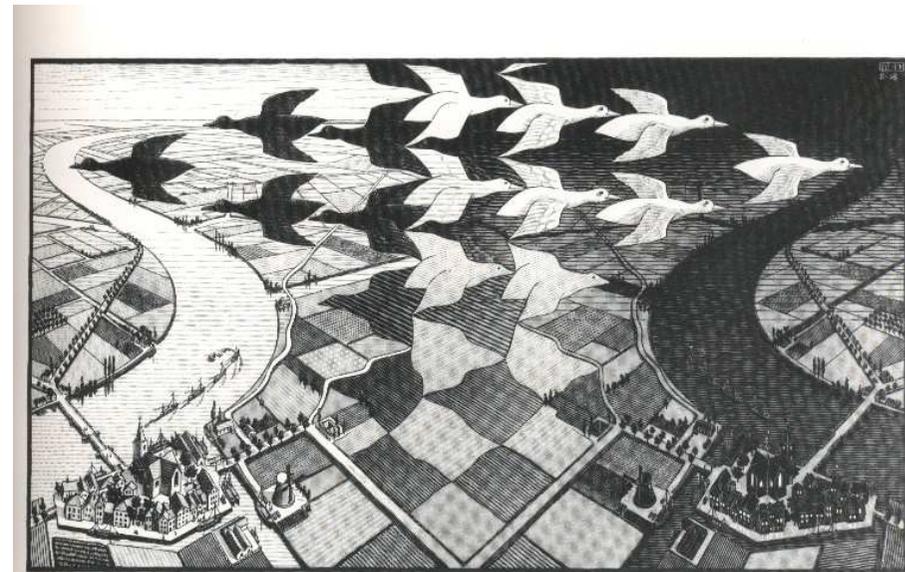
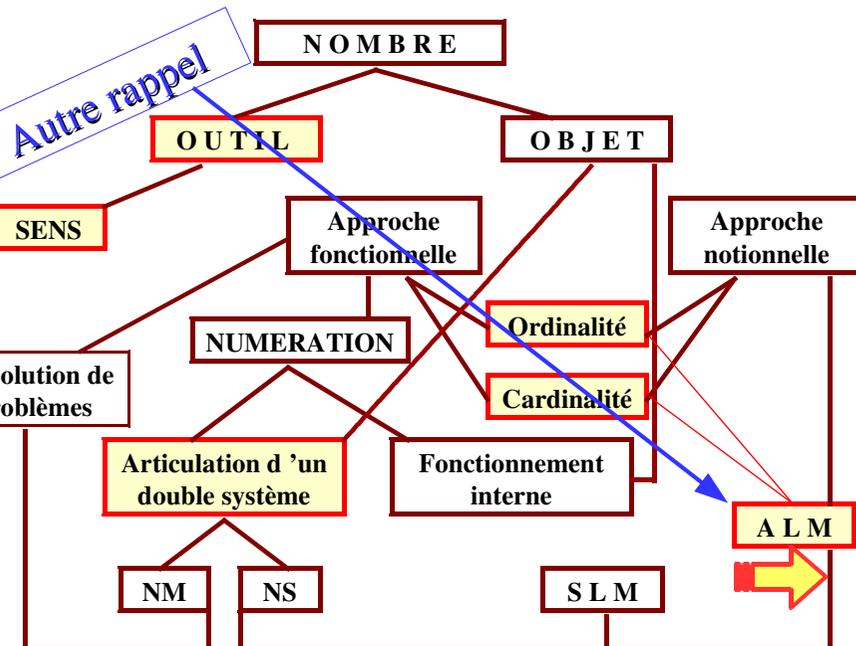
La construction de l'unité :

L'unité n'est pas donnée d'emblée, l'unité d'un comptage est une création mentale.



L'itération :

L'enfant doit apprendre que la relation de succession sur les mots-nombres ("sept" est le suivant de "six"), signifie, au niveau des nombres, l'ajout d'une unité, c'est un de plus que six.



« Day and night » Mc ESCHER